GIUSEPPE VERONESE
PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PADOVA

APPENDICE

AGLI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

VERONA — FRATELLI DRUCKER — PADOVA
LIRRAI - EDITORI

1898

Padova 1897, Tipografia fratelli Gallina

Come avevo promesso nella prefazione dei miei *Elementi*, trattati per la parte didattica con la collaborazione del prof. Gazzaniga del R. Liceo di Padova, e libero docente di Analisi infinitesimale all' Università, pubblico ora l' Appendice contenente le note ivi indicate con numeri romani, allo scopo di completare per gli insegnanti e per gli altri studiosi alcuni concetti del testo, di dimostrare i postulati ammessi per ragioni didattiche in più del necessario e infine di mettere in chiaro il carattere e l' ufficio dei singoli postulati. L' Appendice può essere utile anche a quegli insegnanti che alla fine dell' insegnamento della geometria intendessero fare alcune osservazioni generali intorno ai concetti fondamentali di essa nel modo accennato nella prefazione.

In questa ho già detto abbastanza intorno all' indirizzo del libro; aggiungo qui brevi parole. Della prima parte di esso, uscita alla fine del 1896, è stato già fatto questo anno un primo esperimento in alcuni Licei ed Istituti tecnici, e i risultati ottenuti, per quanto so da notizie private e da recensioni pubblicate da chi appunto ne ha fatto l' esperimento, sono stati abbastanza soddisfacenti. Ripeto anche qui che l' insegnante deve insistere su quei concetti fondamentali che lo scolaro riceve in forma puramente intuitiva o diversa nelle scuole inferiori, quali ad es. il concetto di eguaglianza di due figure e quello di rette parallele.

Gli scolari non preoccupati da pregiudizî hanno la mente più accessibile ai nuovi metodi e alle nuove verità più di scolari buoni frutti, si avrà la prova, come ritengo, che il libro raggiunge questo grado di possibilità.

L'opera mia potrà essere certamente migliorata secondo che l'esperienza e la critica onesta e intelligente suggeriranno. Alla fine di questa Appendice il lettore troverà anzi le semplificazioni di alcune dimostrazioni e alcune osservazioni utili per l'insegnamento, che mi furono in parte suggerite dagli egregi professori Fr. Palatini, G. Bordiga e M. Misani, ai quali per ciò rendo pubbliche grazie. Sarò sempre lieto di fornire agli insegnanti tutti quegli schiarimenti che potessero loro facilitare la interpretazione del testo nella scuola.

Infine avverto ancora che come nel libro ho dato alcuni postulati in più del necessario, così se il tempo fa difetto l'insegnante può soltanto leggere altre proposizioni intuitive tralasciandone la dimostrazione; con questo vantaggio che egli può asserire che di tali proposizioni chieste all'intuizione degli scolari, si può leggere la dimostrazione nel testo o in questa appendice.

Belluno, Settembre 1897

G. VERONESE

Gruppo ordinato

Nota I, pag. 1

Nei F. G. *) abbiamo ricavato le prime nozioni matematiche dalle operazioni del pensiero logico stesso, anzichè considerarle come il risultato di convenzionalismi speciali di segni o di parole. È per ciò che nei F. G. la nozione di gruppo deriva dal pensare insieme più cose date, e quella di serie e di gruppo ordinato scaturiscono dal concetto primitivo del *prima* e del *poi*. Anzi abbiamo distinto la serie dal gruppo ordinato, ma tale distinzione sarebbe stata superflua negli Elementi.

Abbiamo fatto uso nelle nozioni generali dei vocaboli *primo*, *secondo*, *terzo* senza definirli; si potrebbero però definire facilmente al n. 2, e così si potrebbe definire il vocabolo *due*, di cui pure facciamo uso (vedi nota II).

Concetto primitivo di numero

Nota II, pag. 4

Ammettiamo nel testo la conoscenza dei numeri naturali 1 2 3....4... perchè fino alla teoria della misura non abbiamo in fondo bisogno di altro.

*) Con le lettere F. G. indichiamo i nostri Fondamenti di Geometria (Padova, 1891) trad. in tedesco nel 1894, ed. Teubner.

La teoria dei numeri interi è dedotta nei F. G. (intr. cap. III) da quelle dei gruppi ordinati. Così dai segmenti rettilinei, che sono pure gruppi ordinati, si possono ricavare i numeri razionali e irrazionali ordinari, quando i detti segmenti soddisfano al postulato d'Archimede (post. XII).

Idea del punto

Nota II *bis*, pag. 7 *)

Potevo limitarmi nel testo a dare soltanto una sola idea del punto, ad es. come estremo di una linea o come ente che serve a separare due parti consecutive di una linea, oppure potevo anche non indicare alcuna rappresentazione del punto come fa Euclide, bastando per lo svolgimento della Geometria il post. I, considerando il punto come elemento fondamentale. Sta però il fatto che per punto s'intende ordinariamente anche il segno tracciato sul foglio dalla punta di una matita, e che si distingue il punto materiale dal punto matematico. Mi parve dunque conveniente dare la rappresentazione del punto nelle principali sue forme in cui si presenta alla mente; ma l'insegnante può regolarsi come crede.

Col progresso della Geometria la rappresentazione intuitiva del punto andò sempre più perfezionandosi. Secondo il concetto più moderno del punto, che è quello da me usato nella Geometria a più di tre dimensioni, il punto, e quindi anche la figura, non è un oggetto esteriore del quale si faccia astrazione di alcune qualità fisiche, ma l'*imagine* che noi abbiamo di esso (vedi nota XIII).

*) Manca la indicazione della nota nel testo.

Euclide definisce il punto ciò che non ha parti, ovvero che non ha grandezza alcuna (tr. di Betti e Brioschi). Per avere l'*intuizione* del punto, bisogna ricorrere ad un oggetto esteriore o alla sua imagine, e quindi sotto tale aspetto non può essere definito. Logicamente il punto non è che l'elemento fondamentale di tutte le figure; non è dunque che un vocabolo semplice, e non è quindi necessario includere in esso altri concetti più complessi, come quello di parte o di grandezza. Non occorre neppure dire nel testo che i punti sono eguali. Logicamente essi sono rappresentati tutti dallo stesso vocabolo semplice, e per conseguenza il concetto di uno è il concetto di ogni altro; quindi sono eguali (v. F. G. int. cap. I).

Concetto dell'eguaglianza

Nota III, pag. 9

Nei F. G. (int. cap. I) anzichè stabilire le proprietà caratteristiche che distinguono l'eguaglianza di due segmenti (post. II) e di due figure (def. II, 14), ricavo queste proprietà dai principî logici dell'eguaglianza. Ma nella nota a pag. 11 ho detto che nel testo è inutile occuparsi di ciò, appunto perchè negli Elementi per ragioni didattiche seguo una via alquanto diversa da quella dei F. G. E come nell'oss. emp. II del n. 5 ho indicate le varie forme sotto le quali si presenta il concetto del punto, così nell'oss. emp. di pag. 9 ho indicato le varie forme sotto le quali ci si presenta il concetto dell'eguaglianza di due segmenti. Ed anche qui osservo che se ho accennato nella oss. emp. suddetta a varî modi per mostrare che il post. II è una conseguenza dell'osservazione stessa, l'insegnante però può tralasciare del tutto le osservazioni empiriche o sostituirle con altre che a lui sembrino più proprie per giustificare intuitivamente i postulati stessi, sui quali soli, come fu detto nella prefazione, si basa lo svolgimento logico della Geometria. Torneremo sull' argomento nelle note XVII e XIX.

Sistema lineare omogeneo (post. II)

Nota IV, pag. 18

Negli ordinari trattati di Geometria elementare si ammette il nostro post. II sotto altra forma. La prima e la terza parte si ammettono collo scorrimento della retta su sè stessa in una data direzione. La seconda parte si ammette dicendo che il segmento non può sovrapporsi ad una sua parte, e che il segmento AB può sovrapporsi al segmento BA. Si vede facilmente, specialmente se si tien conto delle considerazioni svolte nel libro IV, quanto più semplici sono queste stesse proprietà nel nostro post. II che non esce dalla retta stessa, e che nel concetto di eguaglianza di due segmenti considera solo i due segmenti e non altro. Ed il post. II è semplice anche didatticamente, perchè la I parte del post. non esprime che il fatto dell' esistenza di segmenti eguali e diseguali sulla retta, e le altre due parti sono pure ricavate dall' oss. emp. premessa al postulato.

Si ammette pure ordinariamente che la retta a partire da un suo punto qualunque A si può far coincidere colla parte rimanente. Nel testo questa prop. viene invece dimostrata semplicemente sulla retta col solo post. II (t. II, n. 15).

Se non si ammette la prop.: $AB \equiv BA$, come nei F. G., ammessa invece quella proposizione con un postulato per un determinato punto della retta la si può

dimostrare per ogni altro punto delle retta e si può dimostrare che $AB \equiv BA$ (F. G. pag. 142-143 *).

Secondo me non vi può essere dunque alcun dubbio sulla preferenza da darsi al post. II in confronto dei post. che lo sostituiscono negli altri trattati.

Nei F. G. ho chiamato sistema lineare omogeneo un sistema lineare pel quale ha luogo il post. II senza la prop. $AB \equiv BA$ (intr. n. 68), mentre quello pel quale vale anche la proposizione che un raggio rettilineo limitato da un punto è eguale al raggio opposto, l'ho chiamato sistema *identico nella posizione delle sue parti* (intr. n. 70). Siccome però i sistemi lineari omogenei considerati nel testo godono anche la proprietà sopra accennata, così sarebbe stata superflua tale distinzione, non volendo fare in esso una scomposizione troppo minuta dei postulati per le ragioni didattiche già esposte nella prefazione.

Dimostrazione del post. III.

Nota V, pag. 21

È già detto nella prefazione che i post. XI e XII, che col post. II determinano la retta in sè, vale a dire indipendentemente dallo spazio, sono stati dati nel libro IV per evitare sul principio dell'insegnamento il concetto di indefinitamente piccolo e di segmento limite, e che per questo mutamento dovetti dare alcuni postulati in più del necessario, ad es. il post. III.

Premessi dunque i post. II, XI e XII della retta vogliamo dimostrare non solo il post. III, ma questa proposizione più generale :

*) Nella trad. tedesca fu semplificata questa dimostrazione.

Un segmento rettilineo è divisibile in un solo modo in n *parti eguali.*

Premettiamo due lemmi.

Lemma I. — *In ogni segmento* A B *vi sono segmenti i cui multipli secondo il numero* n *sono maggiori di* AB, *e vi sono segmenti i cui multipli secondo il numero* n *sono minori di* AB.

Osserviamo anzitutto che il post. XI suppone che non esista sulla retta alcun segmento minimo (vedi nota XXI).

Il segmento AB si scomponga in due parti AC, CB. Se CB è la parte maggiore si ha $CB \not> AC$, quindi $BC + CB > AC + CB$, ossia $2\,(CB) > AB$, quindi per ogni altro numero $n > 2$ sarà anche $n\,(CB) > AB$, e per ciò la prima parte del lemma è in tal caso dimostrata. ~~Si ha poi~~ $AC < CB$, quindi :

$$AC + AC < CB + AC$$

ossia $2\,(AC) < AB$. Diviso AC in C_1 per modo che sia $AC_1 < C_1C$, si ha egualmente $2\,(AC_1) < AC$, ma $AC_1 < CB$, perciò $3\,(AC_1) < AB$, e così via. Resta così dimostrata anche la seconda parte del lemma.

Se AC e CB sono eguali, dividendo AC in due parti AC', $C'C$, si avrà $AC' < CB$ e si ricadrà nel caso precedente. Il lemma è dunque in ogni caso dimostrato.

Lemma II. — *Se i punti di un segmento* AB *si ripartiscono in due gruppi* (X) *e* (Y) *tali che* AX *sia minore di* AY *qualunque siano* X *e* Y, *il segmento* XY *diventa indefinitamente piccolo.*

Sia BC un segmento dato piccolo a piacere. Dato un punto X_0 del gruppo (X), si costruisca nel verso di (AB) il segmento $X_0X_1 < BC$; se il punto X_1 non è un punto Y, esso appartiene ancora al

gruppo (X). Si costruisca nello stesso verso il segmento $X_1X_2 \equiv X_0X_1$ e così di seguito. Se Y_1 è un punto qualunqne del gruppo (Y), vi è sempre un numero n tale che $(X_0X_1)\,n > X_0Y_1$, quindi dopo un certo numero di siffatte operazioni si entrerà nel gruppo dei punti Y. Ora se X_p è il primo dei punti Y che così si ottiene, il punto X_{p-1} apparterrà al gruppo (X), e poichè $X_{p-1}X_p \equiv X_0X_1 < BC$ e per ogni altra coppia di punti X, Y compresi fra X_{p-1} e X_p, anche se X_p è il solo punto Y del segmento $X_{p-1}\,X_p$, si avrà sempre $XY < BC$. Ne segue dunque che il segmento XY diventa e rimane più piccolo di ogni segmento dato BC, vale a dire esso diventa indefinitamente piccolo.

Cor. *Una serie di segmenti* AX *sempre crescente (o sempre decrescente) in un segmento dato* AB *ha un segmento limite* AC *tale che* AC *è maggiore (minore) di ogni segmento* AX.

Basta separare i punti di (AB) in due gruppi tali che i punti di un gruppo appartengano ai segmenti AX della serie data, e i punti dell' altro gruppo non vi appartengano. I due gruppi di punti così formati soddisfano alla condizione del lemma II ed hanno per ciò un punto limite C_1 (post. XI e cor.) tale che AC_1 è segmento limite del segmento variabile AX ed è maggiore di ogni stato di (AX).

Dimostriamo ora il teor. sopra enunciato e quindi anche il post. III.

In (AB) vi sono segmenti AX pei quali $(AX)\,n > AB$ e segmenti AY pei quali $(AY)\,n < AB$ (lem. I). Il gruppo (X), e analogamente il gruppo (Y), è illimitato. Invero se X_1 è un punto qualunque di (X) si ha $(AX_1)\,n > AB$, e indicando con X_n il secondo estremo del segmento (AX_1), vi è sempre nel segmento $(X_n\,B)$

un segmento $X_n X'$ tale che $(X_n X')\, n < X_n B$, e per ciò $(A X_1)\, n + X_n X'\, n \equiv A X_n + X_n B$. Posto:

$$X_1 X_1' \equiv X_n X' \quad \text{si ha} \quad (A X_1')\, n < AB$$

vale a dire il punto X_1' appartiene pure al gruppo (X), quindi il gruppo (X) è illimitato.

Ciò posto, se non vi fossero punti L tali che $(AL)\, n \equiv AB$, i punti Z di (AB) rispetto al criterio che il multiplo di AZ secondo il numero n è minore o maggiore di AB, sarebbero ripartiti in due gruppi (X) e (Y) nel modo indicato nel lemma II. Ma il segmento XY diventa indefinitamente piccolo, e poichè i gruppi (X) e (Y) sono illimitati, esso conterrebbe appunto un elemento L distinto dagli estremi (post. XI e cor.). Vi deve essere dunque almeno un punto L tale che

$$(AL)\, n \equiv AB$$

Se vi fosse un altro punto L' tale che $(AL')\, n \equiv AB$ si dovrebbe avere $AL \equiv AL'$, vale a dire L e L' coinciderebbero. Il teor. è dunque dimostrato.

Determinazione della retta mediante una coppia di punti (post. IV).

Nota VI, pag. 21

Ammessi i post. II, XI, XII e V, la prima parte del post. IV, la proposizione che la retta è determinata da una speciale coppia di punti AB e da tutte le altre date da estremi di segmenti eguali ad (AB), e che se una coppia di punti ~~che~~ non determina una retta è situata in ogni retta passante per uno qualunque di essi, e infine che se un lato di un triangolo diventa indefinitamente piccolo tale diventa anche la differenza degli altri due lati, si dimostra che la retta viene determinata da qualunque coppia dei suoi punti se essa è aperta, e da ogni coppia

di punti non opposti, se essa è chiusa (F. G. pag. 233-234). Nell'ultimo caso resta indeterminato se una coppia di punti opposti determini o no la retta. Queste due forme diverse sono possibili e corrispondono alle due forme della geometria di Riemann, cioè alla forma sferica e alla forma della stella di rette (vedi a questo proposito le note IX, XV e XVI).

Dimostrazione del post. VIII

Nota VII, p. 31

Dimostriamo dapprima il post. VIII pei punti medî dei lati del triangolo e per quelli delle loro metà, e così via. Ammessi i postulati I, II, e III (opp. XI e XII), IV, V, VI e VII, si dimostrano i seguenti lemmi.

Lemma I. — *La retta che unisce i punti medî di due lati di un triangolo riesce parallela al terzo lato; e reciprocamente, la parallela condotta pel punto medio di un lato ad un altro lato del triangolo passa pel punto medio del terzo lato.*

Siano ABC il triangolo O' e B' i punti medî dei lati AB e AC (fig. 1). Sia $A'B$ il segmento opposto di AB' rispetto ad O'. Le rette AA', BB' sono parallele, perchè opposte rispetto ad O'. Sia O il punto medio di BB'. Il punto opposto X di A' rispetto ad O appartiene ad AB' ed è tale che

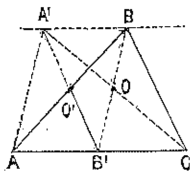

Fig. 1

$$A'B \equiv AB' \equiv B'X,$$

dunque X o coincide con A oppure è l'opposto C di A rispetto a B'. Ma non può coincidere con A, perchè la retta $A'O$ si confonderebbe con la retta $A'A$ la quale è parallela come si è visto, a BB', quindi non può incontrarla nel punto O (t. II, 18). Dunque $A'O$ passa per C, e perciò $A'B'$ ossia $O'B'$ è parallela al lato BC come opposta di BC rispetto ad O.

Reciprocamente, se dal punto O' si conduce la parallela a BC, essa si confonde con la retta $O'B'$, perchè $O'B'$ è pure parallela a BC (t. III, 18).

Lemma II. — *Date due rette parallele, la parallela condotta per un punto di una loro trasversale ad una di esse è parallela anche all' altra.*

Siano AA', XX' le due rette parallele e BB' la parallela condotta per un punto B della trasversale AX alla retta AA' (fig. 2).

Sia O il punto medio di AA'; i punti opposti di B e X rispetto ad O, cioè B'' e X'' si seguono in un dato verso (t. II, 17) e B' e X' si seguono nel verso opposto a partire da A'. Essendo dunque

$$AB \equiv A'B'' \equiv A'B', \quad AX \equiv A'X'' \equiv A'X'$$

si deduce $BX \equiv B'X'$. Se B è interno ad AX, B' è interno ad $A'X'$, e considerando la retta XX' a cui è parallela AA', per la stessa ragione la parallela passante per B alla retta XX' deve passare per un punto B_1' interno ad $A'X'$ tale che

$$BX \equiv B_1'X$$

vale a dire B_1' coincide con B', ossia BB' é pure parallela a XX'. Lo stesso dicasi se X è interno di AB. Se B è dalla parte opposta di X rispetto ad A, lo sono pure X' e B', X'' e B'', e vale lo stesso ragionamento.

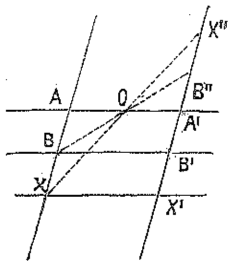

Fig. 2

Dimostriamo ora il post. VIII nel caso sopra accennato, cioè:

Se dal punto medio di uno qualunque dei lati del triangolo e dai punti medî delle sue metà, e così via, si conduce la parallela a un altro lato, essa incontra il terzo lato nel punto medio o nei punti medî delle sue metà e così via.

Sia ABC il triangolo dato (fig. 3). Il teor. è stato dimostrato se il punto R_1 dal quale si conduce la parallela ad un lato BC del triangolo è il punto di mezzo del lato BC (lem. I). Il teor. ha luogo anche pel punto medio R_2 di R_1B, perciocchè nel triangolo R_1BC la parallela a BC passante pel punto medio R_2 di R_1B incontra il segmento R_1C nel suo punto medio R_2'', e nel triangolo R_1CR_1' la parallela al segmento R_1R_1' passante pel punto medio di R_1C, che è la stessa retta R_2R_2'', incontra il segmento $R_1'C$ nel suo punto medio R_2'.

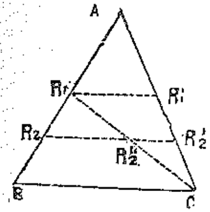

Fig. 3

Si vede da ciò che il teor. è verificato ogni qualvolta il punto considerato è uno dei punti della divisione del segmento AB in $2, 2^2, \ldots, 2^n$ parti eguali; in tal caso sappiamo che il segmento AC resta pure diviso in $2, 2^2 \ldots, 2^n$ parti eguali dalle parallele al lato BC.

Se R e R' sono punti situati in una parallela a BC ed è

$$BR \equiv AB\,\frac{m}{2^n}, \text{ ove } m < 2^n \text{ si ha pure } CR' \equiv AC\,\frac{m}{2^n}.$$

Anche pei punti sui prolungamenti del lato AB che sono estremi dei multipli di AB e quindi anche pei punti di mezzo di questi multipli e così via, è facile dimostrare il teorema.

Premessa questa prop. e i post. XI e XII si può dimostrare il post. VIII per ogni altro punto del lato AB.

Si può considerare come retta il gruppo di punti dato dagli estremi di un suo segmento AB, dei suoi multipli e dai punti di mezzo di essi e delle loro metà e così via; e inoltre da tutti i punti analoghi che si ottengono dalla applicazione del post. V sulla retta AB. Considerate la rette a questo modo, valgono per esse gli stessi post. II, III, IV, V, VI, VII e i teor. dati fino al n. 19 colle stesse dimostrazioni. Si definisce quindi il piano come al n. 20; il piano così ottenuto è un reticolato che appartiene al piano completo quando cioè per mezzo del post. XI si imagina che siano possibili altri punti sopra la retta. Questo reticolato piano è definito da un gruppo rettilineo AB e da un punto P fuori della retta AB. Così sono determinati i gruppi rettilinei AP, PB, AB nel modo sopra indicato, e quelli che congiungono P coi punti del gruppo AB. Per questo reticolato piano valgono certamente le proprietà del piano date fino al teor. II del § 4 (pag. 59) cioè: *ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza*, da cui si ha come corollario: *se un lato di un triangolo* (pensato sempre nel reticolato suddetto) *diventa indefinitamente piccolo, tale diventa pure la differenza degli altri due lati*, e ancora: *se due lati di un triangolo diventano indefinitamente piccoli, anche il terzo lato diventa indefinitamente piccolo.*

Premessi i post. XI e XII ecco come si dimostra il post. VIII per ogni punto di AB del triangolo ABC che non sia un punto della sua successiva divisione per metà.

Siano R e R' ottenuti colla successiva divisione per metà dei lati AB e AC tali che RR' sia parallela a BC e in modo che $BR \equiv AB\frac{m}{2^n}$, $CR' \equiv AC\frac{m}{2^n}$.

(fig. 4). Aumentando indefinitamente n, il segmento di due punti successivi della divisione per metà, che è eguale a $(AB)\frac{1}{2^n}$, diventa indefinitamente piccolo, quindi ogni punto Y di AB che non sia un punto R è limite di due serie di questi punti a partire da A e da B, a cui corrispondono due serie di punti R' nel lato AC che hanno per limite un punto Y' interno di AC (cor. post. XI). Siano R''' e R'' i punti d'intersezione della parallela condotta per R' al lato AB col lato BC e colla parallela condotta per Y a BC. Si ha $R''R' \equiv RY$, e d'altra parte $YR'' \equiv RR' \equiv BR'''$. Se per un altro punto R_1' si ha $R_1'A < R'A$, risulta $R_1'''B < R'''B$, donde $YR_1'' < YR''$, vale a dire il segmento YR'' decresce indefinitamente quando decresce indefinitamente il segmento $R'Y'$ e quindi RY.

La serie dei punti R'' ha in RY'' un punto limite Z' (nota V), onde $R'Z'$ diventa indefinitamente piccolo quando tale diventa $R'R''$ ossia RY, perchè nel triangolo $R'R''Z'$ i lati $R'R''$, $R''Z'$ diventano indefinitamente piccoli. Ma quando R ha per punto limite Y sul lato AB, R' ha per punto limite Y' sul lato AC, e quindi R' ha contemporaneamente due punti limiti Y' e Z'. Ma ciò non è possibile se non quando Y' e Z' coincidono, perchè se Y' e Z' fossero distinti, e quindi estremi di un segmento dato ε, nel triangolo $R'Y'Z'$ quando $R'Y'$, $R'Z'$ diventano indefinitamente piccoli, $Y'Z'$ non diventerebbe indefinitamente piccolo. Dunque resta dimostrato che la parallela condotta da Y al lato BC incontra il lato AC nel punto Y'. Se il punto Y

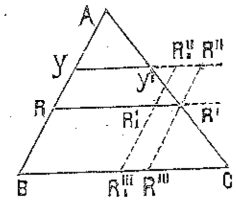

Fig. 4

è fuori di (AB) in AB, basterà far uso di un triangolo di cui un lato sia un multiplo di AB che comprenda il punto Y, ricadendo così nel caso precedente.

Oss. Premesso il concetto di segmenti proporzionali, il che si può fare nel modo indicato nel libro VI restringendosi ai soli segmenti rettilinei e indipendentemente dal piano, dalla dim. del post. VIII si ricavarebbe subito il teor. di Talete.

Considerazioni sulla validità dei postulati in tutto lo spazio.

Nota VIII, pag. 33

Supponendo che i postulati valgano soltanto in un campo limitato C corrispondente a quello della nostra osservazione, come si è accennato nell' oss. III, p. 12 e nella prefazione, le proposizioni del libro I si svolgono in tal caso allo stesso modo, ed è vera anche la proprietà del teorema II, n. 19, perchè la retta nel campo C è un segmento. Soltanto il cor. III del t. II n. 20, cioè: « due rette del piano o sono parallele o si incontrano in un punto » va modificato, perchè nel piano limitato in C, due rette possono non incontrarsi e non essere parallele. Però il campo C si può imaginare costituito dai segmenti eguali uscenti da un punto e tutte le rette
/4 O dello spazio S, e poichè per la rappresentazione del campo d' osservazione è indifferente la grandezza dei segmenti, così è chiaro che date due rette non parallele nel piano in C, si possono sempre scegliere i segmenti suddetti in modo che le due rette si incontrino nel campo C e quindi possiamo ritenere valevoli nel campo C anche le costruzioni dedotte da quella proposizione quando si possono eseguire nel campo C. Abbiamo già indicato nel testo il modo con cui si fa uso

del post. XI quando si voglia limitarsi al campo C corrispondente a quello dell' osservazione sensibile (oss. emp. n. 64 e oss. n. 91). Si può dunque svolgere la geometria per questo solo campo, badando che le costruzioni svolte nel testo sono valide in quanto possono eseguirsi nel campo C.

Un vantaggio dunque dei postulati miei è anche questo: che il sistema di proposizioni e di costruzioni dato nel testo, eccettuate alcune facili modificazioni, rimane lo stesso anche quando s'intenda che i postulati valgano nel solo campo C *corrispondente a quello della nostra osservazione esterna.*

Sotto tale punto di vista il sistema di postulati del testo è più naturale che non sia quello adottato comunemente. Difatti a tale importante condizione non soddisfa ad es. il post. comunemente ammesso che la retta è aperta, ossia che un punto la divide in due parti; come pure il post. che per un punto passa una sola parallela ad una retta data, quando per parallele si definiscono quelle rette che prolungate indefinitamente (intese le rette come segmenti) non si incontrano mai. Ho indicate nella prefazione le ragioni didattiche per le quali ho dato i postulati per tutto lo spazio, anzichè pel solo campo C. Che i postulati valgano anche nello spazio illimitato S, dato da tutte le rette passanti per un punto O (fig. 5), solo perchè come si dice, tale spazio ci è dato dall' intuizione, io non saprei davvero in che modo dimostrarlo. Si tratta qui di una questione filosofica propriamente detta, della cui soluzione il matematico non può occuparsi, e quindi egli deve dimostrare che i postulati ammessi per il campo C possono ritenersi valevoli o dimostrarsi per tutto lo spazio S. Che se poi devo manifestare la mia *opinione* sulla questione, dirò, come dissi nella pref. dei F. G., che noi abbiamo la facoltà di intuire lo spazio, ma l'intuizione è il risultato di questa facoltà applicata all'osservazione esterna, e che modificandosi questa si modifica anche l'intuizione.

Il problema che qui ci proponiamo dapprima di trattare è questo: *ammessa la retta illimitata e perciò i post. II, e XII per tutta la retta, ammessi nel campo* C *gli altri postulati XI, IV, VII e X, la seconda parte del post. IV* (che riguarda la determinazione della retta mediante una coppia di punti) *per tutte le coppie di punti di cui uno è il punto* O *stesso, e finalmente il post. VI esteso alle coppie complete di rette coi vertici nei punti del campo* C, *dimostrare gli stessi postulati in tutto lo spazio* S *).

Dim. del post. XI nello spazio

Ammesso il post. XI per un segmento AB, esso vale per tutta la retta. Infatti non esistendo pel post. XI un segmento minimo AB intorno ad un punto A di C non può esistere pel post. II un segmento minimo intorno ad un altro punto X della retta. Inoltre se si ha un segmento YY' che diventa indefinitamente piccolo sulla retta fuori di C, si può sempre ritenerlo compreso in uno dei segmenti consecutivi eguali ad AB a partire da A, pei quali vale come per AB (post. II) il post. XI.

Oss. Alla nota XXI si vedrà come si possa evitare con opportune definizioni di dare un postulato per la continuità.

*) Lo spazio S può avere tanto tre dimensioni come anche un numero infinito di dimensioni. Il post. pratico I (pag. 112) serve appunto a stabilire che lo spazio fisico ha tre dimensioni (vedi la nota XIII).

Dim. del post. V nel campo C.

Col post. VI si ha che due rette a e b che si incontrano in un punto del campo C sono eguali per essere $ab \equiv ba$ (def. II, 14); vale dunque per esse il post. V. Dunque *tutte le rette che attraversano il campo* C *sono eguali,* perchè se due tali rette a e c non si incontrano, si può scegliere sempre una retta b che le incontri tutte e due; e perciò da $a \equiv b$, $b \equiv c$ si ha $a \equiv c$.

Dim. del post. VI nello spazio

Pel post. VI valevole nel campo C vale anche in C il teor. che le coppie opposte al vertice sono eguali (t. I, 17) e che la figura opposta ad una retta rispetto ad un punto è una retta (t. II, 17), e finalmente che figure opposte rispetto ad un punto sono eguali (t. III, 17).

Sia ora dato un punto P fuori di C (fig. 5), il punto P sarà situato in una retta OX, perchè lo spazio S è determinato da tutte le rette passanti per O. Sia OO_1 un segmento di OX compreso in C e sia O_2 il punto opposto di O rispetto ad O_1. Siccome il post. VI vale per i punti O e O_1 così lo spazio intorno ad O_2 è opposto e perciò eguale a quello intorno a O. Infatti questa eguaglianza è determinata dall'eguaglianza delle coppie opposte intorno ad O_1 (vedi la dim. del t. III, 17). Valendo per O_2 il post. VI, se si indica con O_3 il punto opposto di O_1 rispetto ad O_2, lo spazio intorno ad O_3 è eguale allo spazio intorno ad O_1. Ma lo spazio intorno ad O_1 è eguale a quello intorno ad O, perchè O_1 è opposto di O rispetto al punto medio di OO_1

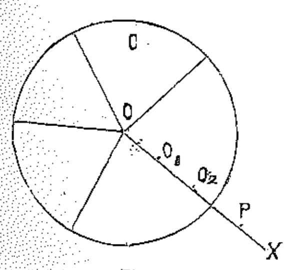

Fig. 5

che è pure compreso in C e pel quale vale il post. VI; dunque lo spazio intorno ad O_3 è eguale a quello intorno ad O. Dunque anche per le coppie di rette di vertice O_3 vale il post. VI. Per la stessa ragione il post. VI vale per i punti O_4, O_5,.., O_n tali che $OO_1 \equiv O_1O_2 \equiv O_2O_3 \equiv O_3O_4 \equiv .... \equiv O_{n-1}O_n$. Inoltre se P' è un punto di $O_1\,O_2$, l'opposto di P' rispetto ad O_1 cade in OO_1 ossia in C, e quindi vale per questo il post. VI e perciò anche per P'. La stessa cosa può dirsi successivamente per un punto qualunque dei segmenti O_2O_3, O_3O_4.... $O_{n-1}O_n$. Ma un punto P qualunque della retta OX pel post. XII è uno dei punti O ovvero è compreso in uno dei detti segmenti, dunque il post. VI vale anche per le coppie di rette col vertice nel punto P. Ma P è un punto qualunque di S, dunque il post. VI è dimostrato in tutto lo spazio S.

Si ha pure:

Lo spazio S *è eguale intorno a due qualunque dei suoi punti.*

Infatti, detti X e Y i due punti qualunque di S, lo spazio intorno a X e Y è eguale allo spazio intorno ad O.

Dim. del post. V nello spazio

La dimostrazione si dà come pel campo C.

Dim. del post. IV nello spazio

Le rette passanti per O non possono coincidere fuori del campo C, perchè preso un punto P fuori di C essendo lo spazio intorno a P eguale allo spazio intorno ad O, devono esistere delle rette passanti per P distinte da OP, i cui punti dunque sono situati in rette passanti per O che non coincidono fuori di C con OP.

Il punto O e un altro punto qualunque determinano per le ipotesi fatte una sola retta. Siano dati due

punti qualunque X e Y fuori di C. Si considerino le rette OX e OY, e sulla retta OX la serie dei segmenti OO_1, O_1O_2,..., $O_{n-1}O_n$ (fig. 5).

Come si è visto, lo spazio intorno ad O_2 è opposto allo spazio intorno a O rispetto al punto O_1, quindi alla retta OY corrisponde una retta opposta O_2Y' sulla quale si può determinare il punto Y' corrispondente di Y, senza bisogno di condurre la retta O_1Y. Alla retta OY', che è unica, deve appunto corrispondere una retta passante per O_2 e Y', che per ciò è pure unica. Così dicasi per qualunque altro dei punti O e per qualunque altro punto del segmento OO_1 e quindi anche dei successivi, e quindi anche di X, dovendo essere X situato in uno dei detti segmenti (post. XII). Dunque per due punti qualunque di S passa una sola retta.

Dim. del post. VII nello spazio

Osserviamo dapprima che nel campo C valgono i teor. I e II nel n. 18 e i lemmi I e II della nota VII. Date ora due trasversali AA', A_1A_1' di due segmenti paralleli r e r' nel campo C, se O e O_1 sono i punti medî di AA' e A_1A_1', ogni segmento $A'X$ che unisce un punto X di AA_1 con A' viene dimezzato in O_1'' dal segmento OO_1 (lem. I, nota VII) (fig. 6), e per ciò anche ogni segmento trasversale XY che unisce due punti X e Y di r e r'. Il segmento OO_1' è metà di AX. Per dimostrare ciò, basta condurre per O_1' la parallela ad AA' nel triangolo $AA'X$ (lem. I, nota VII). Analogamente se O_1'' è il punto medio di $A'A_1$ si ha $2\,(OO_1'') \equiv AA_1$. E se

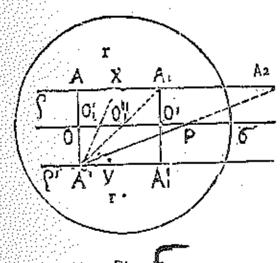

Fig. 6

A_1' è opposto di A rispetto a O_1'', le rette AA', A_1A_1'

sono parallele e $OO_1 \equiv AA_1$. Dunque qualunque sia X nell'interno di AA_1 si ha $OO_1' < OO_1$ e $O_1'O_1 < OO_1$, e per ciò O_1' è interno di OO_1, ossia il segmento $A'X$ interseca OO_1 in un punto interno. Lo stesso dicasi del segmento XY. Se ora considerasi la figura opposta dei segmenti r e r' in C rispetto a un punto qualunque di OO_1, si ha una figura determinata da due segmenti r_1 e r_1' paralleli, che sono situati nelle stesse rette ϱ e ϱ' di r e r', ed è eguale alla figura di r e r' (t. III, 17). Se dunque si considera un punto P qualunque della retta σ ossia OO_1, anche se P è fuori di C, colla costruzione dei segmenti consecutivi eguali ad OO_1, P per il post. XII sarà un punto del segmento $O_{n-1}O_n$, e quindi vale pel punto P le stesse proprietà dei punti compresi nel segmento OO_1 nella figura corrispondente a quella determinata dai segmenti r e r' in C.

Ogni retta che congiunge un punto A' ad es. di r' col punto P deve incontrare r in un punto A_2 tale che il segmento $A'A_2$ viene dimezzato dal punto P. Infatti scelto un segmento che si appoggia a ϱ e ϱ' e viene diviso per metà da P (ciò che, per quanto precede, è possibile), la figura opposta di ϱ rispetto a P è ϱ' (teor. II, 17) e quindi il punto opposto di A' è sulla retta ϱ, cioè è il punto A_2. Reciprocamente, se è dato un segmento trasversale qualunque $A'Z$ di ϱ e ϱ' il suo punto medio P è situato sulla retta σ (fig. 7). Sia O il punto di mezzo di $A'A_1$, O_1 quello di A_1A_1'; la retta opposta di ϱ' rispetto a O_1 è ϱ, e quindi $A'O_1$ incontra ϱ in un punto, che dista da A_1 quanto A da A_1, e che indicheremo con A_2. Ma O e O_1 sono situati sulla retta σ, dunque $A'A_2$ (che è unica) incontra σ nel punto O_1. Per qualunque altro punto X compreso fra A e A_2 vale la stessa proprietà, perchè basta condurre per X la retta XX' sì che $A'X' \equiv AX$,

prendendo X' interno ad $A_1'A_2'$, come X è interno di A_1A_2, e dividere (AX) e $(A'X')$ in due parti tali che per le figure da esse formate valga il post. VII, come per le figure $AA'A_1A_1'$, $A_1A_1'A_2A_2'$. Se invece di A' si sceglie in ϱ' un punto qualunque di $A'A_2'$ vale lo stesso ragionamento. Sussistendo dunque il post. VII per la figura $AA'A_2A'_2$ esso vale anche per la fig. $AA'A_4A'_4$ essendo $AA_4 \equiv (AA_1)\,2$, $A'A'_4 \equiv (AA_2')\,2$, dunque vale anche per la figura $AA'A_{2n}A'_{2n}$. Analogamente nel verso opposto. Qualunque sia il punto Z in ϱ, esso è situato in uno dei segmenti $(A_{2(n-1)}A_{2n})$ in uno o nell' altro verso a partire da A (post. XIII), e quindi il post. VII vale per tutta la figura formata dalle due rette ϱ e ϱ' e dai loro segmenti trasversali.

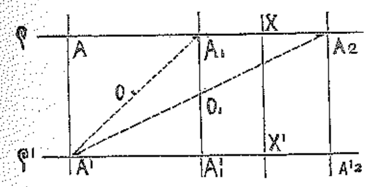

Fig. 7

Siano ora date le due rette ϱ e ϱ' e le rette trasversali AA', A_1A_1' parallele, per le figure delle quali valga pure il post. VII (fig. 8). Se da un punto A'' di AA', essendo $AA' \equiv AA''$, conducesi la parallela $A''A_1''$ a ϱ: essa è pure parallela a ϱ', valendo per le rette AA', A_1A_1' il lem. II della nota VII; ed essendo le rette $A''A_1''$ ossia ϱ'', $A'A_1'$ ossia ϱ', parallele, vale per le rette ϱ' e ϱ'' il post. VII come per le rette ϱ e ϱ' considerando la fig. $A'A_1'A''A_1''$ invece della figura $A'A_1'AA_1$ e ripetendo la stessa dimostrazione. Così si può seguitare a costruire delle altre figure analoghe prendendo i segmenti successivi multipli di AA' in uno e nell'altro verso. Dato dunque un punto X qualunque di una trasversale AA' di ϱ e ϱ' si può condurre per esso la parallela a ϱ. Se si ha invece un punto X qualunque di S, si conduca per X una retta che si appoggi in Y a ϱ. Riguardando questa retta come opposta ad una retta passante per un punto A di ϱ in C, il che è possibile, si può condurre da un punto Y' di XY, e quindi anche da X, la parallela a ϱ, la quale riesce parallela ad un altra parallela passante per un punto qualsiasi della trasversale $Y'Y$, perché vale in tutto lo spazio per la retta ϱ il lemma II della nota VII.

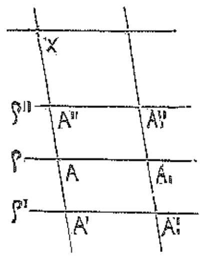

Fig. 8

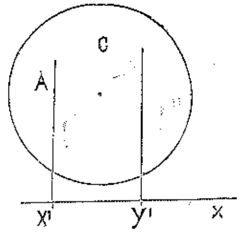

Fig. 9

Ora da X si può condurre anche la parallela ad un' altra retta qualunque x di S (fig. 9). Basta a tal uopo condurre per un punto A del campo C una retta che si appoggi in X' alla retta x e la parallela ad AX' per un altro punto Y' di x abbastanza vicino a X' in modo che essa attraversi il campo C. Per x si può allora ripetere quanto s'è detto per le rette ϱ', ϱ'' ecc. della fig. 8, e quindi da X si può condurre la parallela alla retta x. Il post. VII resta così dimostrato in tutto lo spazio S.

Dim. del post. X nello spazio

Questo post. si dimostra come la prima parte del post. IV.

Oss. 1. — Il post. VIII si dimostra per tutto lo spazio come nella nota VIII, il post. IX sarà dimostrato nella nota XI, e i post. XIII e XIV nelle note XXVI, XXVII per tutto lo spazio S.

Noi abbiamo ammesso dapprincipio che i post. II e XII possono estendersi alla retta illimitata. Si può dimostrare ciò rappresentando la retta illimitata in un segmento del campo C, ad es. col metodo di Cayley-Klein, vale a dire scelti due punti A e B in C, costruendo la cosidetta scala armonica rispetto ad un terzo punto P in C nel verso da A a B sulla retta. Il punto P viene ad essere il punto all' infinito da A verso B. Nello stesso modo si ha un punto P_1 all' infinito dalla parte all' opposta. La retta illimitata è in tal caso rappresentata dal segmento PP_1 esclusi gli estremi. Per i segmenti della scala suddetta valgono i post. II e XII. Al campo C sulla retta corrisponde un campo c sul segmento PP_1 intorno all' origine O della scala, e così per le altre rette passanti per O. Ammessi per questo nuovo campo c i postulati come nel campo C, essi si dimostrano per tutto il campo determinato dai segmenti PP_1 nelle rette passanti per O, che corrisponde allo spazio S.

Definizione e postulato delle parallele

Nota IX, pag. 39

Definite le parallele come quelle rette che non hanno alcun punto comune, o riguardando la retta come un segmento, come quelle rette che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, il geometra russo Lobatschewsky stabilì una geometria, nella quale in luogo di una sola parallela ad una retta si possono condurre per un punto infinite rette che non incontrano la retta e sono comprese fra due di esse. Queste due rette si chiamano *parallele* alla retta data.

Nel campo della nostra osservazione le due parallele passanti per un punto sarebbero vicinissime in modo che non si potrebbero scorgere distintamente. Ma nessuno ha mai veduto due rette parallele nel senso anzidetto, due rette cioè che prolungate indefinitamente non si incontrano mai.

Può anche darsi che tutte le rette del piano si incontrino a due a due, vale a dire che non esista alcuna parallela ad una retta data. La geometria che risulta da questa ipotesi si chiama geometria di Riemann. Di tale geometria del piano si ha una rappresentazione nella stella di rette, se la retta è determinata da una coppia qualunque dei suoi punti, oppure nella stella di raggi o sulla sfera se invece le coppie di punti opposti non la determinano. Nel primo caso al punto si fa corrispondere la retta, e alla retta il fascio di rette della stella, e nel secondo caso al punto si fa corrispondere il raggio o il punto e alla retta il fascio di raggi della stella o il circolo massimo della superficie sferica. La geometria trattata nel testo si chiama *Euclidea*. Lo spazio fisico può avere tanto la forma Euclidea, quanto quella di Lobatchewsky o di Riemann, soltanto ingrandendo il campo della nostra osservazione potrebbe essere decisa la questione. Però nel campo attuale delle nostre osservazioni la geometria Euclidea è quella che ha maggiore approssimazione di verità, oltre che è scientificamente più semplice. Essa è dunque da preferirsi alle altre due per le pratiche applicazioni.

Il postulato delle parallele del testo ha il vantaggio, come fu osservato, di essere indipendente dal piano e di rendere possibile il dimostrare tutte le proprietà del piano stesso; in secondo luogo esso può essere dato soltanto nel campo C corrispondente al campo della nostra osservazione esterna, e quindi può essere dimostrato per tutto lo spazio S. La verifica sperimentale di esso si appoggia sull'eguaglianza dei segmenti, considerando le rette parallele come rette opposte rispetto al punto medio di ogni loro segmento trasversale, ma la verifica dell'eguaglianza dei segmenti mediante il trasporto di un oggetto sull'altro è solo approssimativa, e ciò conferma la possibilità sperimentale dei tre postu-

lati delle parallele, per quanto nel campo delle attuali osservazioni il postulato Euclideo nella forma da me data è con grande approssimazione verificato.

Definizione dell' angolo

Nota X, pag. 39

Nei F. G. abbiamo chiamato *settore angolare* una parte del fascio di raggi limitati al centro, e *angolo* la sua grandezza intensiva come la lunghezza è la grandezza intensiva del segmento. Però mentre facciamo uso nel testo del *segmento* e della parola *distanza*, dapprima come locuzione (dich. n. 27) e poi per indicare una grandezza geometrica (def. III, n. 67), perchè di tale parola si fa spesso uso comunemente, ne è opportuno farne senza, risparmiammo invece negli Elementi la parola settore angolare, adoperando soltanto la parola angolo, di uso comunissimo. Se scientificamente è necessaria la distinzione del settore angolare dall'angolo, sebbene poi, come la distanza e il segmento, possono in molte proposizioni scambiarsi fra loro senza alcun equivoco, pure didatticamente in un trattato elementare non conviene mutare senza necessità l'uso di parole accettate comunemente da secoli. È per ciò che anche la grandezza intensiva del settore angolare l'abbiamo chiamata angolo (def. III, n. 67). Così abbiamo chiamata angolo la parte di piano determinata da un angolo del fascio per non introdurre un nuovo vocabolo (def. I, n. 21), mentre nei F. G. l'abbiamo chiamata settore piano. Dipende forse dai vari significati della parola angolo la ragione delle difficoltà trovate per definire l'angolo.

Vedi sulla definizione di angolo la nota a pag. 618 dei F. G.

Dimostrazione del post. IX.

Nota XI, pag. 85

Supponiamo che siano premessi i post. XI e XII e il cor. del lem. II della nota V che abbiamo dedotto da essi. Premettiamo i due lemmi seguenti.

Lemma I. — *Dato il segmento* AB *e un punto fuori di esso tale che sia* PA $\leqq$ PB, *vi è sempre in* (AB) *un segmento* A'B (*che può anche coincidere con* AB) *tale che* PA' $\equiv$ PA, *e per ogni altro punto* X *di esso è* PX $<$ PB.

Se $PA \equiv PB$, il piede M della perpendicolare condotta da P ad AB cade nel mezzo di AB (fig. 10); e per ogni punto X contenuto in AB si ha $PX < PA$ (t. III, 27). In tal caso $A'B$ coincide con AB.

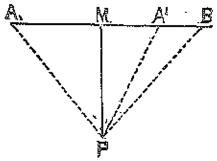

Fig. 10

Se invece è $PA < PB$ ed M cade in (AB), il punto A' opposto di A rispetto ad M cade in MB, e si ha $PA' \equiv PA$ e per ogni punto X di $(A'B)$ si ha

$$PX > PA \text{ e } PX < PB$$

Se finalmente M cade fuori di (AB), o se cade in A, allora per ogni punto X di (AB) vale la stessa proprietà. Nessun altro caso è possibile. Dunque ecc.

Lemma II. — *Dato un arco* (AB) *ed un punto* P *tale che* PA $\leqq$ PB, *vi è sempre in* (AB) *un punto* B' (*che può coincidere con* B) *tale che* PB $\equiv$ PB', *e per ogni altro punto* X *dell'arco* (AB') *è* PA $<$ PX $<$ PB. *Oppure vi è un punto* A' *tale che* PA' $\equiv$ PA *e per ogni altro punto* X *dell'arco* (A'B) *si ha* PA $<$ PX $<$ PB.

Supponiamo dapprima che l'arco (AB) contenga il punto N più distante da P (fig. 11). Se $PA \equiv PB$, allora

non vi può essere in (AB) un altro punto egualmente distante da P. E per ogni altro punto X di (AB) si ha

$$PX > PA.$$ Se $PA < PB$, o il punto B è situato col punto A sulla stessa semicirconferenza determinata dal diametro MN passante per P, ovvero vi è su questa semicirconferenza un punto B' tale che

$$PB' \equiv PB.$$

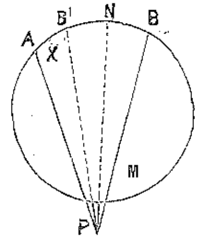

Fig. 11

Per ogni punto X compreso fra A e B o fra A e B' si ha:

$$PX > PA \text{ e } PX < PB$$

Se (AB) contiene il punto M più vicino a P del diametro passante per P, allora vi è in (AB) un arco $(A'B)$ che soddisfa alle condizioni del lemma. Dunque ecc.

Dimostriamo ora il post. IX.

Osserviamo anzitutto che dal teor. II, 27 risulta che se il lato di un triangolo diventa indefinitamente piccolo tale diventa anche la differenza degli altri due lati.

Intanto, in AB si può sempre segnare un altro segmento od arco $A'B'$, di cui l'uno o l'altro estremo, o tutti e due, coincidono rispettivamente con A e B (lem. I e II), tale che sia $PA' \equiv a$ e $PB' \equiv b$ e per gli altri punti X di esso si abbia

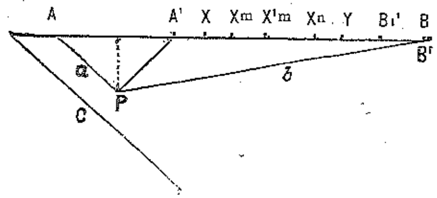

Fig. 12

$a < PX < b$ (fig. 12). Non può essere che ogni segmento PX maggiore di a sia anche maggiore di c, perchè la differenza fra PX e PA', comunque X sia vicino ad A', rimarrebbe maggiore del segmento $c - a$.

Ciò posto, consideriamo tutti i punti X di $A'B'$ pei quali $a < PX < c$. Ordinando i punti X nel verso $A'B'$, la serie corrispondente di PX non può avere un segmento massimo PX_1, perchè fra un segmento PX_1 della serie e c, come fra a e c vi è sempre un segmento PX maggiore di PX_1 e minore di c che appartiene perciò alla serie suddetta. Si può supporre inoltre data una serie X_n fra i punti X nel verso $A'B'$ tale che quando $A'X_n$ è maggiore di $A'X_m$ sia $PX_n > PX_m$. Difatti nel segmento od arco $X_m B'$ havvi un segmento od arco $X'_m B'_1$ tale che nel solo punto X'_m si ha $PX'_m \equiv PX_m$ mentre per ogni altro punto X_n di $(X'_m B'_1)$ si ha $PX_n > PX_m$. Infine la serie AX_n ha un punto limite Y tale che $(AY) > (AX_n)$ qualunque sia n (cor. lem. II, nota V) pel quale si ha pure $PY > PX_n$; che se ciò non fosse, Y non sarebbe situato, contrariamente alla costruzione fatta, nel segmento X_nB. Da tutto questo si conchiude che non può essere $PY < c$, perchè Y sarebbe un punto X e quindi sarebbe compreso in un segmento AX_n. Nè può essere $PY > c$, perchè la differenza tra PY e PX_n sarebbe sempre maggiore di $PY - c$ mentre PY è limite di PX_n; dunque $PY \equiv c$. c. v. d.

Elementi all' infinito impropri e attuali

Nota XII, pag. 110

Mediante le definizioni di punto, retta e piano all' infinito date nel testo l' introduzione di questi elementi non può dar luogo ad alcun equivoco, e come già dissi nella prefazione, essi servono a semplificare parecchie proposizioni e dimostrazioni. I punti all' in-

finito si possono sostituire ai punti effettivi in quelle sole proposizioni che derivano dalla determinazione della retta e del piano mediante due e tre punti (oss. III, n. 37). Ciò deve essere fatto bene risaltare anche nell' insegnamento della geometria proiettiva, poichè altrimenti i giovani scambiano facilmente in qualunque caso i punti all' infinito coi punti effettivi, mentre ai primi non si possono estendere le proprietà metriche dei secondi. Nel testo faccio uso dei punti all'infinito al principio del libro III e solo quando è utile la loro considerazione. Ho anzi sempre avvertito quando i punti che si considerano possono essere anche all' infinito, di guisa che negli altri casi intendo sempre che i punti siano punti effettivi, i punti cioè dati dal post. I e ai quali soli si riferiscono i postulati. Ogni qualvolta del resto si tratta di proprietà metriche, che dipendono cioè dai concetti di eguaglianza, di distanza e di angolo, come ad es.: condurre per un punto una perpendicolare ad una retta, i punti sono ~~quelli~~ sempre effettivi.

Si possono stabilire anche per gli elementi all' infinito dei concetti metrici. La retta all' infinito può esser considerata come una circonferenza col centro in un punto qualunque effettivo del piano in modo che ad angoli eguali al centro corrispondano segmenti eguali della retta all' infinito e viceversa, perchè gli angoli coi lati paralleli e dello stesso verso sono eguali. Due rette nel piano all'infinito si incontrano sempre in un punto, o in due opposti se i punti della retta all' infinito di un piano si fanno corrispondere ai raggi e non alle rette del piano stesso, o di un piano ad esso parallelo. Stabilito il concetto dell'eguaglianza dei segmenti troviamo verificati i post. necessari dati nel testo, tranne il post. VII e quindi si può svolgere la geometria del piano all'infinito come si è fatto per la geometria della stella o della sfera, indipendentemente però da questi enti (F. G. pag. 361).

I punti all'infinito del testo sono punti *impropri* nel senso che sono introdotti per via di locuzione e quindi la loro esistenza è puramente *letterale*. Essi non sono dunque da confondersi coi punti all'infinito *attuale* dei F. G. che sono logicamente dei punti tali e quali quelli effettivi considerati nell'ultima forma accennata nell' osservazione empirica II, n. 5 e nella nota II *bis*. Quando però si restringe l'uso dell' infinito attuale allo studio dello spazio Euclideo, esso si comporta verso di questo come l' *infinito improprio*. Questa è un' altra prova che nello studio dello spazio Euclideo la considerazione dell'infinito attuale non conduce ad alcuna contraddizione (Vedi la nota XXII). Vi è questa differenza sostanziale che coi punti all' infinito attuale si definiscono gli elementi paralleli del sistema Euclideo, che fa parte di un sistema più generale che comprende anche quello di Riemann, mentre gli elementi all' infinito improprio sono definiti mediante gli elementi paralleli dello spazio Euclideo, senza che esso faccia parte di alcun altro spazio.

Possibilità geometrica degli spazi a più di tre dimensioni.

Nota XIII, pag. 112

Dal post. X non si deduce che la figura formata da tutti i punti che si possono considerare compatibilmente coi postulati dati precedentemente sia lo spazio generato nel modo indicato nella def. I, n. 38, che si chiama anche *spazio a tre dimensioni*, perchè per un punto di esso si possono condurre tre rette a due a

due perpendicolari (c. t. III, n. 41), le quali corrispondono alle direzioni che volgarmente si chiamano *lunghezza, larghezza* e *profondità*. È per ciò che è necessario il teor. I del n. 38.

Lo spazio $O\pi$ della detta definizione non è lo spazio fisico, ma bensì la rappresentazione mentale di esso ossia lo spazio geometrico, perchè il punto non è un punto materiale, ma un concetto prodotto nella nostra mente per virtù di astrazione nel modo indicato nell' oss. emp. del n. 5 del testo e nella nota II *bis*, come l'imagine in uno specchio non è l'oggetto stesso. Se al postulato diamo il significato di essere una proposizione indimostrabile colle premesse verificate direttamente nel campo esteriore, oppure di non contraddire a quelli così stabiliti e che servono a costruire la figura corrispondente allo spazio fisico, come sono appunto quelli necessari da noi dati nel testo (nota VIII), non è esclusa la esistenza di un punto fuori dello spazio $O\pi$, come i postulati che servono a costruire il piano non escludono la esistenza di un punto fuori del piano. Ciò non significa però che esista un punto materiale fuori dello spazio fisico, come con l' oss. emp. di pag. 112 abbiamo ammesso per il piano. Per noi tutti i punti materiali sono contenuti nel mondo che noi intuiamo direttamente per mezzo dei nostri sensi, e quindi per ammettere che vi sia un ambiente esterno che lo contenga bisogna supporre che delle cose fuori di noi non percepiamo tutta la estensione. Questa sarebbe un'ipotesi metafisica di cui, quali matematici non possiamo occuparci, anche se le nostre costruzioni possono condurre ad una tale ipotesi. Come tali non possiamo ammettere che il minor numero possibile di fatti che cadono sotto i nostri sensi e che per la loro semplicità possano essere riconosciuti universalmente, applicando alle forme astratte da essi generate il metodo deduttivo *).

Ma si può osservare giustamente: se possiamo asserire che dai soli postulati coi quali si può costruire il piano e dimostrare le sue proprietà non si deduce la inesistenza di un punto fuori del piano perchè l'osservazione stessa ci assicura invece del contrario, mancando l' osservazione esterna rispetto allo spazio ordinario S_3 come si prova che dai postulati del testo (eccettuato s' intende il post. pratico di pag. 112) non si può dedurre la inesistenza di un punto fuori di S_3 quando questo punto e quelli di S_3 debbono essere assoggettati a quei postulati? Ho detto giustamente, perchè se si potesse dedurre in base ai postulati del testo che ai punti fuori di S_3 non si possono applicare i postulati suddetti, l' ammettere questi punti condurrebbe evidentemente a una contraddizione.

Quando scrissi il mio primo lavoro sugli spazî a più di tre dimensioni **) la prova l' avevo data tacitamente per via analitica. Ma volendo stabilire la geom. a più di tre dimensioni indipendentemente da ogni concetto analitico, ho ricorso alle costruzioni nello spazio S_3 che derivano dalla geom. descrittiva a quattre dimensioni ***), come accennai in una nota di una mia memoria del 1884 ****), e che sviluppai nel 1892 in una nota negli Atti del Circolo matematico di Palermo.

---

*) Per la parte didattica vedi in fine di questa appendice cosa diciamo a proposito del teor. I di pag. 109.

**) Behandlung der proiectiv. Verhält. ecc. Math. Ann. vol. 19.

***) Atti del R. Istituto Veneto, 1882.

****) Sulla superficie omaloide normale F_2^4 dello spazio S_5. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1884.

Questo metodo non solo toglie ogni dubbio sulla possibilità della geometria a più di tre dimensioni, ma dimostra ancora che le figure di S_3 che si ottengono per proiezione o sezione da figure degli spazî a più di tre dimensioni esistono effettivamente in S_3 e si possono costruire coi soli postulati dati nel testo coi quali si costruisce S_3 e si dimostrano le loro proprietà.

Nei F. G. ho fatto poi vedere come possiamo imaginare un punto fuori di S_3 senza bisogno di ricorrere nè al metodo analitico nè a costruzioni eseguite in S_3 ~~nel modo~~ sopra ~~indicato~~, ed è così che imagino principalmente l'esistenza degli spazi a n dimensioni e dello spazio generale (che ha un numero infinito di dimensioni), le cui proprietà si estendono ad ogni loro rappresentazione analitica e ad ogni loro rappresentazione geometrica in S_3 (vedi la nota seguente).

Quanto all'intuizione, noi l'applichiamo egualmente negli spazi superiori come in S_3, vale a dire il punto, la retta, il piano in S_n ce li imaginiamo sempre come nello spazio ordinario. Uno spazio S_3 di S_n lo intuiamo come lo spazio ordinario, e quando congiungiamo due punti l'uno in S_3 e l'altro fuori di S_3, noi intuiamo la retta congiungente tale quale la imaginiamo ordinariamente, e sappiamo per i concetti stabiliti che essa non è situata in S_3; e poichè la retta la imaginiamo in un istante diverso da quello in cui pensiamo S_3, o imaginiamo S_3 come un ente già dato, così ci par di vederla fuori di S_3.

Riepilogando, lo spazio metafisico è per me il mondo esterno in sè, cioè indipendente da noi. Quale sia il numero delle dimensioni di questo spazio non si sa nè per via di ragionamento nè di esperimento. Lo spazio fisico o esteriore è quello determinato dal campo della nostra osservazione esterna, che dipende per ciò dal primo e dalla nostra osservazione; ha tre dimensioni. Lo spazio geometrico intuitivo è l'imagine geometrica dello spazio fisico, ed ha pure tre dimensioni. Lo spazio geometrico generale ha un numero infinito di dimensioni; contiene spazî intuitivi a quattro ecc. a *n* dimensioni per quanto grande sia *n*.

La confusione fra questi diversi significati della parola spazio può generare come generò alcune critiche errate contro la mia concezione dello spazio generale.

Principio di proiezione e di sezione

Nota XIV, pag. 114

Il principio su cui si fonda la dimostrazione del teor. VI del n. 38 vale a dire quello di dedurre da figure dello spazio ordinario delle costruzioni e delle proprietà delle figure piane è assai fecondo per la geometria proiettiva, e fu da me esteso sistematicamente agli spazî a più di tre dimensioni ove trova, come dissi nella prefazione, il suo più alto significato e la sua più importante applicazione. Infatti limitandolo allo spazio a tre dimensioni si erano ottenute solo alcune figure speciali del piano come proiezioni o sezioni di figure di S_3; ricorrendo agli spazî a più di tre dimensioni si hanno invece intere classi di enti geometrici del piano e dello spazio S_3 che sono proiezioni di un ente semplice (*ente normale*) di uno spazio superiore, dalle cui proprietà si deducono proprietà degli enti del piano e di S_3.

Onde dapprincipio si volle giudicare l'importanza della geometria a più di tre dimensioni soltanto dai risultati ottenuti nello spazio ordinario, ma questo concetto è

ormai abbandonato, e si ritiene, come è giusto, che la geometria a più di tre dimensioni è anche importante di per sè indipendentemente dalle sue applicazioni nello spazio ordinario, appunto perchè lo spazio geometrico, come ho avvertito, non è più lo spazio fisico, sebbene lo spazio S_3 corrisponda ad esso. Il campo delle ricerche geometriche è andato così sempre più estendendosi ed acquistando nuove forme.

Geometria della stella

Nota XV, pag. 142 (dopo l'oss. III)

La geometria della stella di rette e quelle delle stelle di raggi corrispondono alle due forme della geometria piana di Riemann accennate nella nota IX.

Geometria della sfera

Nota XVI, pag. 178

La geometria sulla superficie sferica è equivalente alla geometria piana Riemanniana nella quale due rette che si incontrano hanno due punti opposti in comune.

Versi delle figure

Nota XVII, pag. 192

In nessun altro dei trattati da me conosciuti è svolta con rigore questa questione dei versi o dei sensi delle figure. La eguaglianza di due triedri (limitandosi come si fa alla sola congruenza delle figure) mediante gli elementi di due triedri (facce e driedri) non si può stabilire senza il concetto di verso. Legendre distingue l'eguaglianza per congruenza da quella per simmetria, ma non stabilisce bene, dati certi elementi eguali di due triedri, se i due triedri siano eguali per congruenza o per simmetria.

Baltzer che, seguendo Moebius, si addentra meglio degli altri trattatisti nella questione dell'eguaglianza per congruenza e per simmetria, spiega, ma non definisce, il verso nelle figure, ad es. del triangolo, con concetti affatto empirici, cioè mediante un osservatore che sta in una posizione incomoda coi piedi sul piano e percorre i lati del triangolo, facendo dipendere anche i versi delle figure piane dallo spazio stesso. Analogamente per i versi di un tetraedro.

Per maggiori sviluppi di questo paragrafo veggansi i F. G. pag. 347 e 417.

Movimento ed eguaglianza

Nota XVIII, pag. 198

Vedi a questo proposito i F. G. pag. 279.

Nota XIX, pag. 201

Dal § 4 del libro IV si vede con quale semplicità si spiegano le proposizioni relative al movimento senza deformazione, e quanti e quali siano i postulati che si ammettono comunemente ponendo a base della geometria il postulato di tale movimento. Ma ciò non basta. Come ho detto nella prefazione, il movimento si appoggia esso stesso al concetto di eguaglianza e restringe questo concetto alla sola congruenza quando sia applicato a definire l'eguaglianza delle figure. Lasciando stare che quando si definisce la figura come *luogo* occupato da un corpo, ai luoghi non si dice come si possa applicare il concetto del movimento, basta ad es. esaminare il caso in cui la figura è un segmento rettilineo. Si dice che il movimento di una figura avviene *senza deformazione* quando le mutue relazioni fra gli elementi non si alterano. Ma

quali sono le relazioni mutue fra gli elementi di un segmento rettilineo? Esse sono relazioni fra le parti del segmento che sono esse pure segmenti. Nella nota a pag. 615 dei F. G. e seg. osservai che l'idea di eguaglianza di due cose, e per ciò anche di due figure, nasce dal confronto che la nostra mente fa tra esse. Ora l'idea del movimento di un corpo è estranea a questo concetto, ma non già quella di un moto senza deformazione, perchè un corpo nel movimento può deformarsi anzi sappiamo che si deforma sia pure insensibilmente. Un caso di tale deformazione insensibile lo abbiamo citato alla fine della nota IX, da cui dipende la ragione per la quale noi riteniamo vero praticamente il postulato Euclideo delle parallele anzichè quello di Lobatschewsky o di Riemann.

Per dire che un segmento si muove senza deformazione dobbiamo confrontare fra loro due posizioni A e B del segmento. Ed osserviamo che se le parti del segmento crescono proporzionalmente le relazioni fra esse rimangono le stesse. Bisogna dunque dire che le parti del segmento in A e le corrispondenti del segmento in B sono eguali, e per ciò si cade in un circolo vizioso.

Non dando la def. dell'eguaglianza delle figure mediante l'uso del movimento senza deformazione per evitare la petizione di principio sopra indicata, non si può però ritenere che il concetto dell'eguaglianza di due figure sia primitivo ed irriducibile (come qualche trattatista ha fatto), perchè manca allora ogni criterio per stabilire quando due figure sono eguali essendo dati alcuni elementi eguali di esse. Ad es. quando si tratta di provare che due triangoli sono eguali se hanno due lati e l'angolo compreso eguali non si può servirsi della sovrapposizione, perchè non avendo stabilito che due figure eguali sono sovrapponibili, non è escluso che sia i lati come gli angoli siano eguali in altro modo, come ad es. due triedri opposti al vertice (veggasi a tal proposito G. B. Marangoni « Il concetto dell'eguaglianza in geometria e i nuovi Elementi del prof. Veronese » Padova, 1897).

Ammessa l'esistenza del punto fuori di S_3 (ciò che come si è avvertito è logicamente possibile), due figure simmetriche di S_3, ad es. due triedri opposti al vertice si possono sovrapporre, come si possono sovrapporre in S_3; due triangoli simmetrici del piano attraverso lo spazio. Dunque anche per ciò l'eguaglianza non deve essere definita col movimento in S_3. L'eguaglianza ottenuta praticamente col movimento senza deformazione è dunque una eguaglianza approssimativa che non deve servire di base alla geometria razionale, ma serve per le pratiche applicazioni di essa nello spazio fisico, ed è perciò che è dato nel testo il post. pratico II.

Nel testo il post. II stabilisce l'esistenza di segmenti eguali sulla retta e le loro proprietà caratteristiche e la def. II, n. 14 stabilisce quando due figure sono eguali.

E fa veramente onore a Euclide di aver fatto senza del movimento dove ha potuto, poichè nei suoi Elementi è chiara la tendenza di evitarlo per quanto gli è stato possibile.

Nota XX, pag. 201

Secondo quanto è stato detto alla nota XIII sulla geom. a più di tre dimens. la figura va considerata in essa come rappresentazione mentale e neppure come luogo occupato nello spazio fisico. Tuttavia ogni rappresentazione mentale può essere considerata come un oggetto dato fuori di noi, sebbene astratto (F. G. intr. 18) e

sotto tal punto di vista si può applicarle il linguaggio del movimento, dopo però avere spiegato, come si è fatto nel testo e nei F. G., che cosa esso significhi geometricamente.

Postulato della continuità

Nota XXI, pag. 205

Nell'introduzione dei F. G. ho dato due ipotesi (VI e VIII) per stabilire la continuità relativa e la continuità assoluta della forma fondamentale (che corrisponde alla retta nella geometria), vale a dire la continuità in un campo *finito*, per tutti i segmenti del quale vale il post. d'Archimede (post. XII), e la continuità quando si ammettono i segmenti infiniti e infinitesimi (v. nota XXII). Nei Fondamenti ho detto che il continuo intuitivo non si definisce, ma che pel geometra basta definire il continuo come un gruppo di punti che soddisfa a certe proprietà. In qual modo si formi in noi l'intuizione del continuo è un problema che spetta al psicologo risolvere, se pure può essere risolto; come si determini il continuo quale gruppo di punti, spetta al geometra. Determinando il continuo rettilineo mediante i numeri reali ordinari a partire da un punto come origine, oltre che si introducono nel concetto del continuo geometrico altri concetti ad esso estranei, si subordina il continuo a quello dei numeri ordinari assoggettando così il continuo rettilineo al post. d'Archimede. Ho già detto che la possibilità di un nuovo postulato B con uno o più postulati dati A, senza cioè che B insieme con A conduca ad alcuna contraddizione, ha più sicuro fondamento quando è dimostrata logicamente, e in difetto di tale dimostrazione possiamo contentarci dell'esperienza quando i post. A

e B siano tratti dalla diretta osservazione, la quale si estende ad una sola parte dello spazio fisico.

Il post. XI ammette in fondo la proposizione: *che in ogni segmento dato esiste almeno un punto distinto dagli estremi*, e oltre a ciò la prop.:

A. Quando un segmento (XX') *sulla retta cogli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo, esso contiene almeno un punto distinto dagli estremi* *).

È questa la proposizione che chiamo *proposizione della continuità*. La prima non deriva da questa, ma deriva dal post. III, nel caso che il post. III non si voglia dimostrare. È per ciò che ho preferito nel testo tenere unite le due proposizioni. Che la A non derivi dalla prima risulta subito costruendo il gruppo di punti in un segmento AB che deriva dalla applicazione successiva del post. III; il gruppo che così si ottiene soddisfa alla prima proposizione, ma non alla A.

La prop. A corrisponde alle mie ipotesi VI e VIII dei F. G. con questo vantaggio però che essa è indipendente dal post. d'Archimede (post. XII) o dai concetti d'infinito e infinitesimo. Della ip. VI e VIII ho data una logica giustificazione mediante i numeri stessi che da quelle ipotesi si ricavano, supponendo naturalmente, come è possibile, che quei numeri siano poi stabiliti indipendentemente da quelle ipotesi. Negli Elementi ho ricorso all'osservazione per giustificare il post. XI, quando l'indefinitamente piccolo si consideri come indivisibile praticamente (vedi oss. pag. 317 del testo), ma ciò non costituisce ancora a stretto rigore, una giustifica-

*) *Indefinitamente piccolo* significa che il segmento diventa e rimane da un certo stato in poi più piccolo di ogni segmento scelto a piacere.

zione logicamente esauriente, tanto più che se nelle proposizioni svolte nel testo si possono con lievi modificazioni sostituire i segmenti indivisibili praticamente agli indefinitamente piccoli, non sempre ciò accade, perchè mentre ad es. la somma di n segmenti che diventano indefinitamente piccoli per quanto grande sia n, diventa pure indefinitamente piccola, la somma di n segmenti praticamente indivisibili per n abbastanza grande dà un segmento finito *).

In una nota « Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi » **) ho accennato ad un altro metodo diretto e geometrico per giustificare le ipot. VI e VIII dei F. G. o la prop. A e recentemente con maggiori particolari nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Questo metodo mi permette anche di dimostrare che nello stabilire i fondamenti della Geometria non è necessario dare un postulato per la continuità della retta.

1. Il segmento (XX') viene considerato nella proposizione A in quanto esso diventa indefinitamente piccolo, e quindi possiamo supporre che X si mantenga sempre da una stessa parte dei punti X' e viceversa.

Al detto postulato sono premessi nei Fondamenti e negli Elementi:

I. il post. I: *esistono punti diversi*;

II. la prop. contenuta nel post. II: *dato un punto qualsiasi* A *sulla retta esistono in un dato verso due segmenti l'uno col primo l'altro col secondo estremo nel punto* A *ed eguali ad un segmento* XY *della stessa retta e nel verso dato*.

*) Negli altri trattati si ammette ordinariamente il postulato delle continuità per un sistema di grandezze qualsiasi senza alcuna giustificazione nè empirica, nè logica.

**) Math. Annalen, vol. 47, 3.

Negli Elementi ammettiamo esplicitamente (post. II) e nei Fondamenti implicitamente nel concetto di eguaglianza *che un segmento non è eguale ad una sua parte* *).

Oltre alla prop. I e II dobbiamo ammettere pure quest' altro postulato:

III. *In ogni segmento* AC *a partire da un punto* A *in un dato verso della retta vi è almeno un punto distinto dagli estremi* **).

Colla prop. II si dimostra la prop. III per ogni punto della retta.

Dalla II si deducono i teor. della somma e differenza di due e più segmenti e dei multipli e summultipli di un segmento ***).

Posto ciò procediamo così:

Def. I. — Dicesi *punto improprio* ogni segmento (XX') che ha gli estremi sempre variabili in versi opposti sulla retta e diventa indefinitamente piccolo.

I punti dati dal post. I si chiamano *punti proprî.*

Oss. I. — Secondo questa definizione il punto improprio è determinato non tanto delle serie di punti X e X', quanto dal fatto che (XX') diventa indefinitamente piccolo; vale a dire scelto uno dei segmenti (XX') piccolo ad arbitrio, i segmenti (XX') in esso contenuti determinano lo stesso punto improprio.

---

*) Nel post. II degli Elementi è ammessa pure per ragioni didattiche la invertibilità del segmento $AB \equiv BA$, mentre nei F. G. è dimostrata (nota IV).

**) La prop. III, come ho detto, è contenuta con la prop. A nel post. XI degli Elementi, ed è invece dimostrata nei F. G. mediante le ipotesi degli infiniti e infinitesimi.

***) Vedi Elementi n. 7, 8, 9, 10. Se non si fa uso della prop. $AB \equiv BA$ bisogna tralasciare il teor. I del n. 8. Vedi anche F. G. intr. n. 72, 73, 74 e 79.

a) Ogni punto proprio è determinato da un punto improprio.

Infatti si può costruire un segmento (XX') cogli estremi X e X' sempre variabili in versi opposti e che si avvicinino indefinitamente ad un punto proprio A.

Def. II. — Due punti dati (XX'), (YY') tali che X, X', Y, Y' si seguono nel verso da X a X' si dicono *coincidenti* se ogni punto proprio X sia un punto Y o compreso fra punti Y; oppure se ogni punto X' è un punto Y' o compreso fra punti Y'. Ciascuna di queste condizioni ha per conseguenza l' altra.

Oss. III. — Tale definizione è verificata da tutti i punti improprî che determinano lo stesso punto proprio o da due punti improprî che determinano due punti proprî coincidenti.

Osservo ancora che quando i due punti (XX'), (YY') coincidono non può essere che fra i punti Y vi siano punti X', perchè detti Y_1 e Y_2 due dei punti Y compresi fra un punto X' e un altro punto Y, nel segmento Y_1Y_2 e nei successivi non potrebbero esservi altri punti X contro la def. II. Dalla def. II segue ancora che il segmento XY' resta meggiore di un certo segmento ε, se i due punti (XX'), (YY') sono distinti. Infatti se XY' da un dato suo stato rimanesse minore di ogni segmento dato ε, allora XY avrebbe la stessa proprietà, e per ciò in ogni campo di punti Y vi sarebbero dei punti X.

E inversamente se il segmento XY', si mantiene superiore ad ogni segmento dato ε, i due punti (XX'), (YY') sono distinti, perchè quando sono coincidenti il segmento XY' diventa indefinitamente piccolo.

E quando i due punti sono distinti, si possono scegliere sempre due stati dei segmenti (XX'), (YY') ad es. X_1X_1', Y_1Y_1' tali che $X_1'Y_1$ sia maggiore di un certo segmento ε, e tale rimane ogni segmento $X'Y$ i cui estremi X' e Y sono rispettivamente compresi in (X_1X_1'), (Y_1Y_1'). E viceversa, se ciò accade, i due punti (XX'), (YY') sono distinti.

Def. III. — Due punti improprî (XX'), (YY') *si seguono in un verso della retta*, quando considerati i detti punti determinati da segmenti $(X_1X_1')(Y_1Y_1')$ abbastanza piccoli (def. II), i punti X_1, X_1', Y_1, Y_1' si seguono nel verso dato.

Oss. IV. — In virtù di questa def. valgono per l'ordine dei punti improprî nella retta le stesse regole che pei punti proprî (vedi testo n. 2).

Def. IV. — Per *segmento di due punti improprî* (XX'), (YY') si intende la coppia delle due serie di segmenti proprî XY, $X'Y'$, che indicheremo col simbolo $[(XX'), (YY')]$.

Per la determinazione del segmento basta considerare i punti X e X', Y e Y' tali da essere contenuti in due segmenti $(X_1 X_1')$ e $(Y_1 Y_1')$ piccoli a piacere, e tali per ciò che il segmento $X'Y$ si mantiene superiore ad un dato segmento $X_1'Y_1$.

Oss. V. — Se i punti (XX'), (YY') determinano due punti proprî L e L', il segmento $[(XX'), (YY')]$ determina il segmento LL', e inversamente il segmento LL' può essere considerato come un segmento che unisce due punti improprî.

Def. V. — Due segmenti $[XX')$ $(YY')]$, $[(X_1 X_1')$ $(Y_1 Y_1')]$ si dicono *eguali* se la differenza di $X'Y$ e $X_1'Y_1$ diventa indefinitamente piccola.

Oss. VI. — Se ad ogni segmento $X'Y$ è *eguale* un segmento $X_1'Y_1$, e viceversa, la differenza dei segmenti corrispondenti essendo sempre nulla soddisfa alla condizione di rimanere inferiore ad ogni segmento dato ε, quindi i due segmenti sono eguali.

Def. VI. — Il segmento $[(XX')$ $(YY')]$ dicesi *minore* o *maggiore* del segmento $[(X_1 X_1')$ $(Y_1 Y_1')]$ se si può dare un segmento ε tale che la differenza $X_1'Y - X_1'Y_1$ oppure $X_1'Y_1 - X'Y$ resti maggiore di ε.

b) Un segmento improprio non è eguale ad una sua parte.

Difatti se il segmento $[(XX')$ $(YY')]$ fosse eguale ad una sua parte $[(XX')$ $(ZZ')]$, la differenza $X'Y - X'Z$ dovrebbe diventare indefinitamente piccola, e quindi anche (ZY), e a maggior ragione $(Z'Y)$, mentre i due punti (ZZ'), (YY') sono distinti.

c) Dato un punto qualsiasi (A A') *sulla retta esistono in un dato verso due segmenti l'uno col primo l'altro col secondo estremo in* (AA') *ed eguali ad un segmento* [(XX') (YY')] *della stessa retta nel verso dato.*

Difatti a partire da ogni A' nel verso da A a A' si portino i segmenti $A'B$ eguali ai segmenti $X'Y$; si otterrà così un segmento $[(AA')$ $(BB')]$ eguale al segmento $[(XX')$ $(YY')]$ (fig. 13). Ogni punto che non appartiene ai segmenti determinati dai punti B nel verso da A' a B e non è punto limite di essi, è un punto B'.

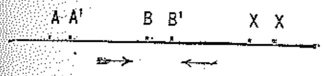

Fig. 13

Oppure facciasi la stessa costruzione a partire da A' come secondo estremo nel verso dato e si avrà un altro segmento eguale ad $[(XX')$ $(YY')]$.

Oss. VII. — La prop. II è così completamente verificata anche dai punti improprî e valgono per i segmenti improprî i teoremi citati della somma, differenza e i multipli e summultipli dei segmenti *).

d) Dato un segmento qualunque [(XX') (YY')] *esiste in esso un punto improprio distinto dagli estremi.*

Siccome gli estremi del segmento sono distinti, vi deve essere un segmento ε tale che qualunque siano X e Y' è $XY' > \varepsilon$ (oss. III). Potremo dunque scegliere nel segmento $[(XX')$ $(YY')]$ un punto improprio (ZZ') distinto dai punti (XX'), (YY'), altrimenti imaginato un tale punto fra (XX') e (YY') dovrebbero XZ' e ZY' diventare indefinitamente piccoli, e quindi anche XZ e $XY' \equiv XZ + ZY'$, mentre (XX'), (YY') sono dati e distinti (fig. 14).

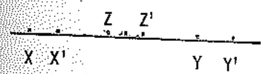

Fig. 14

*) Se si ammette anche la prop. $AB \equiv BA$, compresa nel post. II del testo, allora si dimostra qui facilmente che un *segmento improprio è eguale al suo inverso.*

Oss. VIII. — Le definizioni di segmento improprio variabile e di segmento improprio che diventa indefinitamente piccolo si danno come pei segmenti proprî.

e) Se un segmento improprio $[(XX')\ (YY')]$ *cogli estremi sempre variabili in versi opposti diventa indefinitamente piccolo, esso contiene un punto improprio distinto dagli estremi.*

Scelto uno stato del segmento $[(XX')\ (YY')]$, per la def. IV e le oss. III e VIII il segmento $X'Y$ si mantiene superiore ad un certo segmento dato. Ad es. se i punti X e X', Y e Y' sono contenuti nei due segmenti piccoli a piacere (X_1X_1'), (Y_1Y_1') di guisa che i punti $X_1X_1'Y_1Y_1'$ si seguano nell'ordine in cui sono scritti, il segmento $X'Y$ si mantiene maggiore del segmento $X_1'Y_1$. Ora quando $[(XX')\ (YY')]$ diventa indefinitamente piccolo, $(X'Y)$ diventa pure indefinitamente piccolo, chè altrimenti il primo non potrebbe diventare indefinitamente piccolo. Ma il punto improprio determinato da $(X'Y)$ non può essere uno stato del punto (XX'), perchè lo sarebbe per la stessa ragione anche del punto (YY'), e quindi (XX'), (YY') finirebbero per coincidere, il che contraddice alla ipotesi che (XX') e (YY') rimangono sempre distinti per quanto essi si avvicinino indefinitamente.

Oss. IX. — D'altronde, indicato con (ZZ') il punto determinato dal segmento variabile $[(XX')\ (YY')]$, se in ogni campo dato di punti Z vi sono dei punti X, vi sono anche dei punti X', e quindi anche pel punto (XX'), che non è fisso ma variabile, e pel punto (ZZ') non si verificano neppure le condizioni della def. II, che del resto riguarda due punti improprî invariabili.

Quando si considera un punto improprio (AA') che determina un punto proprio L distinto da A e A', riguardando A e A' e L come punti improprî succede lo stesso fatto che accade fra i punti (XX'), (YY') e (ZZ').

Oss. X. — La proposizione *d)* equivale alla prop. *A* della continuità. Per i punti improprî essa viene dimostrata, e quindi non si ha bisogno di ammetterla con un postulato come pei punti proprî.

Ammesso ora per la retta anche il post. XII si dimostra:

f) Per i segmenti improprî sulla retta vale il post. d'Archimede.

Difatti dati due segmenti improprî

$[(AA')\ (A_1A_1')] \equiv \alpha \qquad [(BB')\ (B_1B_1')] \equiv \beta$

tale che sia $\alpha < \beta$, dico che esiste un numero n tale che è $\alpha n > \beta$.

Il segmento $[(AA')\ (A_2A_2')] \equiv 2\alpha$ si costruisce portando dai punti A_1' dei segmenti eguali rispettivamente ai segmenti $A'A_1$ (oss. VI). Analogamente si costruiscono gli altri segmenti multipli di α. La differenza dei segmenti variabili $(A'A_n)$ e $(A'A_1)n$ diventa indefinitamente piccola, perchè si ha:

$$A'A_n \equiv A'A_1 + A_1A_1' + A_1'A_2 + A_2A_2' + \ldots + A'_{n-1}A_n$$
$$(A'A_1)n \equiv A'A_1 + A_1'A_2 + \ldots A'_{n-1}A_n$$

mentre $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_{n-1}A'_{n-1}$ diventano indefinitamente piccoli e quindi tale diventa anche la loro somma.

Il segmento $A'A_1$ diventa e rimane superiore ad un segmento dato ε, chè altrimenti i punti (AA'), (A_1A_1') coinciderebbero; ed essendovi sempre un numero n tale che $\varepsilon n > B'^{(1)}B_1^{(1)}$, ove $B'^{(1)}B_1^{(1)}$ è un segmento qualunque dato del segmento improprio β, si ricava che la differenza $(A'A_1)n - (B'B_1)$ resta superiore ad un segmento dato e quindi $(A'A_1)n > B'B_1$, ed anche $A'An > B'B_1$ vale a dire:

$[(AA')\ (A_1A_1')]\,n > [(BB')\ (B_1B_1')]$ (def. VI).

I post. II e XII riguardano la retta in sè, e ammesso che sulla retta non vi sia un segmento minore degli altri si può evitare così di dare un nuovo postulato per la continuità estendendo il concetto di punto.

2. Ma ammessi anche gli altri post. IV, VI, VII e X, si può evitare di dare un nuovo postulato per la continuità della retta in tutto lo spazio?

A tale scopo dobbiamo rendere il concetto del punto improprio indipendente dalla retta.

Se due rette hanno un punto proprio O in comune (fig. 15), supponiamolo determinato sulle due rette da due segmenti (XX'), (YY') indefinitamente piccoli nel senso della def. I. I segmenti XY, $X'Y'$, diventano pure indefinitamente piccoli, perchè gli altri due lati nei triangoli OXY, $OX'Y'$ decrescono indefinitamente. Per la stessa ragione diventano indefinitamente piccoli (XY'), $(X'Y)$. Dunque diremo:

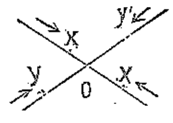

Fig. 15

Def. I. — Date due serie distinte qualunque di punti (X) (X') tali che il segmento XX' diventi indefinitamente piccolo, in quanto esso diventa indefinitamente piccolo, diremo che esso determina un *punto improprio* che indicheremo con (XX').

Oss. I. — Questa definizione comprende come caso particolare anche quella del punto improprio definito precedentemente.

Def. II. — Due punti dati (XX'), (YY'), si dicono *coincidenti* se il segmento (XY) diventa indefinitamente piccolo.

Oss. II. — Da ciò si conclude che il segmento determinato da un punto X o X' con un punto Y o Y' diventa indefinitamente piccolo; basta a tal uopo ricordare che se due lati di un triangolo diventano indefinitamente piccoli, tale diventa il terzo lato (t. II, 27).

Def. III. — L'insieme delle rette proprie che si ottengono congiungendo i punti proprî (XX') (YY') si chiama retta *impropria*. E per segmento *improprio* dei due punti (XX'), (YY') intendesi l'insieme dei segmenti determinati dalle stesse due serie di punti (XX'), (YY').

Oss. III. — Se i punti (XX'), (YY') determinano due punti proprî L e M, la loro retta impropria determina la retta propria che passa pei punti L, M. In tal caso i due punti impropri a cui danno luogo sulla retta i punti L e M coincidono rispettivamente coi punti (XX') (YY') (def. VII).

Oss. IV. — La differenza di due segmenti proprî che appartengono ad un segmento improprio diventa indefinitamente piccola; ciò si dimostra ricordando che se un lato di un triangolo diventa indefinitamente piccolo, la differenza degli altri due diventa indefinitamente piccola, e considerando i triangoli formati dai punti X, X' coi punti Y e Y'.

La eguaglianza o la diseguaglianza di due segmenti improprî $[(XX')\,(YY')]$ $[(X_1X_1')\ Y_1Y_1')]$ si definisce come precedentemente (def. V e VI).

Per costruire sulle rette improprie un segmento eguale ad un segmento improprio dato $[(AA')\ (BB')]$ a partire da un punto (XX') di essa (che è determinato da due serie di punti situati rispettivamente sulle rette proprie AB, $A'B'$) basta portare sopra ciascuna retta a partire dai punti X e dai punti X' dei segmenti eguali sulle stesse rette ai segmenti AB e $A'B'$; gli estremi Y e Y' di questi segmenti formano come è facile di vedere, un punto improprio (YY') che determina con (XX') un segmento improprio eguale al segmento dato. Se il segmento $[(AA')\ (BB')]$ è sopra una retta propria come precedentemente, allora si tralasciano come inutili i punti Y compresi fra punti Y', e i punti Y' compresi fra punti Y.

Valgono dunque per la retta impropria le prop. *b)* e *c)* che corrispondono alla prop. II e alla prop. *c*, ammesse per la retta propria.

Così con un'analoga dimostrazione valgono per le rette improprie le prop. *d)*, *e)* del n. 1, e qualora si ammetta per la retta propria il post. d'Archimede vale anche la prop. *f)*. E con ciò resta dimostrato per il segmento improprio il post. III come lo abbiamo dimostrato per il segmento proprio nella nota V.

a) Fuori della retta impropria esistono dei punti proprî.

Per due punti improprî distinti passa una sola retta impropria.

Infatti scelta una retta XY propria appartenente alla retta impropria (XX') (YY'), si può scegliere un punto P fuori di essa tale che la sua distanza dalla retta XY, quando X e Y si avvicinano indefinitamente a $X'Y'$, resti superiore ad un certo segmento dato ε. Questo punto P è fuori della retta impropria.

Per la seconda parte osserviamo che dati due punti improprî distinti, le rette proprie da essi determinate e che determinano la retta impropria sono determinate in modo unico dai due punti.

Oss. V. — In modo analogo si dimostra per le rette improprie il post. VI, e quindi anche il post. V, quando sia ammesso per le rette proprie.

Data la def. di rette improprie opposte (def. I, n. 17) e quella di rette parallele (def. n. 18), e ammesso che sia per le rette proprie il post. VII, lo si dimostra anche per le rette improprie.

Analogamente valendo il post. X pel piano effettivo, lo si dimostra per il piano improprio, come si è dimostrata la prima parte della prop. *a*).

Ciò che precede non solo conduce al risultato che la prop. *A* della continuità può essere dimostrata pei punti improprî, ma anche a quest'altro: che data la prop. *A* con un postulato pei punti proprî essa non può condurre ad alcuna contraddizione, perchè essa sostituisce la prep. *d*) che vale pei punti improprî. La differenza sta in ciò: che col post. XI del testo imaginiamo intuitivamente che come ogni punto proprio può essere considerato come un punto improprio, così ogni punto improprio determina un punto proprio. Ma tale intuizione non ha alcuna conseguenza nello svolgimento logico della geometria che è lo stesso tanto pei punti proprî quanto per quelli improprî.

Osserviamo però che il poter risparmiare un postulato per la continuità non significa che la prop. *A* data pei punti proprî sia dimostrabile pei punti proprî, come lo sono i post. III, VIII, IX, XIII e XIV. Il principio della dimostrazione è quello stesso, col quale, come accennai nella nota XIII, ho costruito in S_3 uno spazio S_4, senza bisogno di dare un postulato per la prop.: Esiste

un punto fuori dello spazio ordinario » imaginando però in tal caso il punto tale e quale lo imaginiamo nello spazio S_3.

Passando poi dalla teoria alla pratica, non occorre dare alcun postulato pratico, come abbiamo dovuto darne uno per le tre dimensioni dello spazio fisico e pel movimento senza deformazione (post. pratici I e II del testo), perchè ogni punto improprio determina un punto materiale, e quindi i risultati ottenuti coi punti proprî si applicano senz'altro al campo dell'osservazione.

Postulato d'Archimede (post. XII)

Nota XXII, pag. 207

Il post. XII è un postulato di limitazione, perchè stabilisce che dati due segmenti α e β, $\alpha < \beta$, vi è sempre un numero n tale che $\alpha n > \beta$.

Infatti preso un punto A sulla retta come origine si può costruire col post. II in uno e nell'altro verso una scala con un segmento dato AB come *unità*. Allora ogni altro segmento dato AC maggiore di AB nel campo di questa scala soddisfa alla condizione

$$(AB)\,n > AC \quad (1)$$

Se AC è minore di AB, possono darsi due casi: o vi è un numero n tale che

$$(AC)\,n > AB \quad (2)$$

oppure non esiste alcun numero n tale che sia soddisfatta la (2).

Il post. XII esclude questa seconda possibilità, ma nello stesso modo che col post. X costruiamo lo spazio S_3 senza che il post. X stesso stabilisca il numero delle dimensioni dello spazio, che soddisfa ai post. I-X, il che stabiliamo per lo spazio fisico col post. pratico I, così possiamo far senza del post. XII, lasciando quindi teoricamente indeterminato se esistano segmenti AC che non soddisfino alla (2), definendo invece il campo della scala di una unità AB e limitando le nostre considerazioni geometriche al solo campo di questa scala.

In tal caso bisognerebbe dare il post. XII come *postulato pratico* per le pratiche applicazioni.

Nei F. G. ho stabilita una geometria più generale, nella quale non tutti i segmenti rettilinei soddisfano alla condizione (1), appoggiandomi al principio già più volte accennato che sono geometricamente possibili quei postulati che lo sono logicamente e non contraddicono ai postulati che servono a definire la figura C corrispondente al campo della nostra osservazione e che verifichiamo direttamente negli oggetti contenuti in questo campo.

I segmenti AC maggiori o minori di AB pei quali sono soddisfatte le relazioni (1) e (2) si chiamano *finiti*, ma se AC è maggiore di AB e non è soddisfatta la (1) per quanto grande sia n, neppure AB soddisfa alla (2) rispetto ad AC, ed allora AC si chiama *infinito attuale* rispetto ad AB, e AB *infinitesimo attuale* rispetto ad AC.

La questione degli infiniti e infinitesimi attuali è antica, ma se essa diede luogo a molte discussioni prò e contro; ciò dipese dal fatto (come osservai nei F. G. pag. 619 e seg.), che essa non fu mai nè ben posta nè ben determinata, troppo spesso fu trattata più con considerazioni filosofiche propriamente dette intorno all'origine del continuo rettilineo che con considerazioni puramente matematiche.

Furono date delle dimostrazioni del post. d'Archimede che come quelle del post. delle parallele di Euclide sono errate. La questione è dunque questa:

Dati i postulati necessari per stabilire ad es. la geometria d'Euclide, quelli ad es. del testo, senza il post. d'Archimede, stabilendo la continuità o sotto la forma

data nel testo o come alla nota precedente, si può dimostrare il post. d'Archimede?

La *risposta è negativa*, e quindi è *possibile una geometria proiettiva indipendente da quel postulato nel senso che vi sono segmenti rettilinei che non soddisfano a quel postulato* (Vedi anche nota XII).

Le critiche pubblicate dai sigg. G. Cantor, W. Killing e A. Schoenflies su questo argomento sono errate *).

Definizione di grandezza

Nota XXIII, pag. 209

Ordinariamente non si dà nei trattati di geom. elem. la definizione di grandezza, ritenendo la grandezza un concetto primitivo, e portando così nello svolgimento logico della geometria un concetto indeterminato e suscettibile di varie interpretazioni. Da alcuni si dice che la *grandezza* è ciò che è suscettibile di aumento e di diminuzione. Tale spiegazione oltre che restringer il concetto di essa, non è una definizione. Così è unilaterale e restrittiva la definizione che la grandezza è ciò che si può rappresentare numericamente, come se il numero non fosse esso stesso una grandezza. Ciò presuppone inoltre che il concetto della grandezza numerica sia completo. È per ciò che volendo rappresentare i segmenti rettilinei coi soli numeri reali ordinari, non si poteva scoprire l'esistenza dei segmenti infiniti e infinitesimi attuali.

Noi abbiamo dato nel testo e nei F. G. i caratteri della grandezza indipendentemente dal concetto di nu-

*) Math. Annalen Vol. 43 e 44 e Jahresbericht des deutschen Math. Vereins. 1897.

mero e siamo arrivati per ciò ai segmenti infiniti e infinitesimi attuali, mentre il sig. Levi-Civita riuscì poi a stabilire i numeri che se ne deducono con criteri puramente aritmetici *).

Equivalenza. Dimostrazione dei post. XIII e XIV.

Nota XXIV, pag. 214

Negli altri trattati di geometria elementare si dà subito la definizione dell'equivalenza per parti qualunque di due figure piane e solide, senza definire che cosa si intenda per parti. È per ciò che la dimostrazione del teor. III del n. 67 data ordinariamente ammette tacitamente un altro postulato oltre a quello dell'equivalenza propriamente detto, e cioè che due parti aventi un punto esterno ed un altro interno l'una all'altra hanno una parte in comune (vedi nota XXVIII).

Nota XXV, pag. 222

Della definizione di figura finita diremo alla fine della nota XXVIII.

Nota XXVI, pag. 223

Per la dim. del post. XIII supponiamo note tutte le proposizioni che precedono il detto postulato e inoltre il capitolo sui segmenti proporzionali che è indipendente dalla teoria dell'equivalenza. Non facciamo uso della def. di figura poligonale e poliedrica finita data nel testo, perchè ne daremo un'altra più semplice e scientificamente più propria.

*) Atti del R. Istituto Veneto, 1894.

Lemma I. — *Ad un triangolo ed a quelli che si ottengono dividendolo con rette passanti per i suoi vertici, si possono far corrispondere in modo determinato e unico dei segmenti rettilinei tali che il segmento corrispondente al triangolo dato sia somma dei segmenti corrispondenti ai triangoli ottenuti nel modo anzidetto e di cui il triangolo dato è somma.*

a) Sia ABC il triangolo dato, e lo si trasformi nel triangolo FCD equivalente e di altezza data e conforme il prob. II del n. 68 (fig. 16). Al triangolo ABC facciamo corrispondere il segmento CD. Dividiamo ora ABC in due triangoli AB_1C, B_1AB con una retta uscente dal vertice A, e costruiamo il triangolo FCD_1, equivalente alla parte AB_1C e di altezza a. Al triangolo ACB_1 facciamo corrispondere il segmento CD_1.

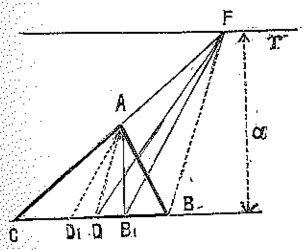

Fig. 16

I triangoli CFB, CAD sono equiangoli e quindi simili, epperò:

$$CD : CB = CA : CF \quad (1)$$

Similmente i triangoli CFB_1, CAD_1 danno:

$$CD_1 : CB_1 = CA : CF$$

Segue da ciò:

$$CD : CB = CD_1 : CB_1 \quad (2)$$

e quindi:

$$CD - CD_1 : CD = CB - CB_1 : CB$$

ossia

$$D_1D : CD = B_1B : CB \quad (3)$$
$$D_1D : B_1B = CD : CB \quad (4)$$

Il segmento D_1D lo facciamo corrispondere al triangolo ABB_1. Ma $CD \equiv CD_1 + D_1D$, dunque al triangolo

ABC somma dei triangoli AB_1C, B_1AB corrisponde il segmento CD somma dei segmenti corrispondenti rispettivamente ad AB_1C e a B_1AB. É chiaro che valendo la (3) per ogni triangolo così ottenuto in ABC, il teorema vale qualunque sia il numero dei triangoli ottenuti in ABC con rette passanti per A.

Se invece del lato AC si adopera nella costruzione del triangolo equivalente ad ABC nella fig. 16 il lato AB, ad ABC e alle sue parti ottenute con rette passanti per A corrispondono gli stessi segmenti. Sia F' il punto d'intersezione di AB con la retta r, e BD' il segmento corrispondente al triangolo ABC; vuolsi dimostrare che $CD \equiv BD'$ (fig. 17). Infatti i due triangoli ABC, $AF'F$ sono equiangoli, essendo r e BC parallele, quindi sono simili, vale a dire:

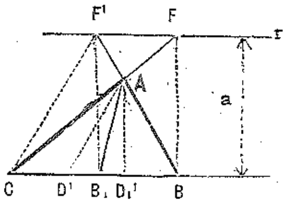

Fig. 17

$$CA : AF = BA : AF_1 \qquad (5)$$

ossia $\quad CA : CA + AF = BA : BA + AF'$

donde $\qquad CA : CF = BA : BF \qquad (6)$

Ma si ha: $\quad BD' : BC = BA : BF'$

e per la (1), (2) e (3) si ha:

$$CD : CB = BD' : BC$$

dunque: $\qquad CD \equiv BD' \qquad (7)$

vale a dire il segmento CD corrispondente al triangolo ABC ottenuto colla costruzione della fig. 16 è eguale al segmento BD' ottenuto nella fig. 17.

Se ora consideriamo il triangolo AB_1B, ad esso corrisponde colla costruzione suddetta un triangolo di vertice F' e di base BD_1' tale che (2)

$$BD'_1 : BB_1 = BD' : BC$$

ossia $\qquad BD_1' : BD' = BB_1 : BC$

e per la (3)

$$BD_1' : BD' = DD_1 : CD$$

Ma $BD' \equiv CD$, dunque $BD_1' \equiv DD_1$. Vale a dire al triangolo AB_1B corrisponde lo stesso segmento che nella costruzione della fig. 16. Al triangolo ACB_1 corrisponde con questa costruzione un segmento $D'D_1'$ che per la stessa ragione è eguale al segmento CD_1 trovato precedentemente.

Dimostriamo ora che il segmento corrispondente al triangolo ABC rimane lo stesso se invece del vertice A si considera nella costruzione della fig. 16 o della fig. 17 un altro dei suoi vertici, ad es. B (fig. 18). Sia r' la parallela al lato AC e alla distanza a da esso. Le rette r e r' e i due lati BC, AC del triangolo formano un parallelogramma che avendo le due altezze eguali è un rombo, e perciò $CF \equiv CF_1$. Sia CE la base del triangolo CF_1E equivalente al triangolo ABC secondo la solita costruzione, dico che $CE \equiv CD$. Infatti si ha

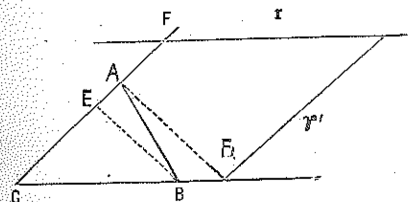

Fig. 18

$$CE : CA = CB : CF_1$$

e per la (1) $\quad CD : CB = CE : CB$

donde $\qquad CD \equiv CE.$

Se ora si divide il triangolo ABC in triangoli con rette passanti per B, i segmenti ad essi corrispondenti danno anche in questo caso per somma il segmento corrispondente al triangolo ABC.

Il teorema è dunque in ogni caso dimostrato.

Oss. I. — Osserviamo che il segmento corrispondente ai triangoli ACB_1, AB_1B si ottiene come quello del triangolo ABC. Possiamo dunque dire che il segmento corrispondente ad un triangolo qualunque ottenuto con rette passanti per uno dei vertici di ABC fino all'incontro del lato opposto, si ottiene colla stessa costruzione della fig. 16 applicata direttamente al triangolo come se esso fosse isolato.

Oss. II. — Il segmento corrispondente a un triangolo qualunque ABC e ad ogni suo triangolo ottenuto con rette passanti pei vertici nel modo sopra indicato *non è mai nullo*, come risulta dalla fig. 16 stessa.

Def. I. — Il segmento corrispondente ad un triangolo secondo la costruzione delle fig. 16 dicesi *associato* al triangolo *rispetto al segmento a.*

Lemma II. — *Qualunque divisione data di un triangolo* ABC *in triangoli* α, β, γ.... *o una suddivisione di essi in triangoli, si ottiene mediante rette che passano pei vertici del triangolo* ABC *limitate ai lati opposti o pei vertici del triangolo così ottenuti limitate ai lati opposti, e così via.*

La somma dei segmenti associati ai triangoli α β γ... *è eguale al segmento associato al triangolo* ABC.

Se α, β, γ... sono ottenuti colla costruzione indicata nel lemma stesso, cioè con rette passanti pei vertici del triangolo ABC ecc., allora l'ultima parte deriva senz'altro dal lem. I colla costruzione della fig. 16.

Se invece α, β, γ.... non sono ottenuti in questo modo, e prolunghiamo un lato della divisione, ad es. di α fino ad incontrare il perimetro del triangolo ABC o di un triangolo della divisione in cui quel segmento è contenuto, otteniamo una suddivisione di α β γ.... in parti poligonali, e quindi anche in triangoli. Sia $A'B'C'$ il triangolo α. Scelto $A'B'$, prolunghiamolo fino ad incontrare il perimetro di ABC (fig. 19). Se la retta $A'B'$ passa per uno dei vertici, il triangolo ABC viene diviso in due trian-

goli; se invece taglia due lati ad es. AB, AC in due punti X, Y, il triangolo rimane scomposto in due parti cioè nel triangolo AXY e nel quadrangolo $XYBC$. Congiungendo B con Y il quadrangolo resta diviso nei due triangoli XYB, YBC. Per ottenere questi tre triangoli con rette passanti pei vertici, si conduca dapprima la retta BY che divide il triangolo ABC nei triangoli AYB, YBC; poi la retta YX che divide il triangolo AYB nei triangoli AYX, XYB.

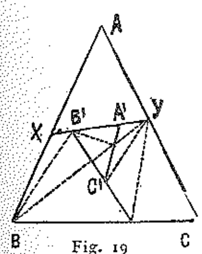

Fig. 19

Scelgasi un altro segmento della divisione ad es. $B'C'$ e lo si prolunghi fino ad incontrare i perimetri dei triangoli in cui fu diviso il triangolo ABC e nelle quali è contenuto tutto o in parte il secondo segmento. La retta $B'C'$ incontrerà i perimetri dei triangoli suddetti in uno dei due modi sopra indicati, in guisa che applicando la costruzione precedente, le parti determinate rimarranno divise in triangoli ottenuti mediante rette passanti pei vertici di ABC o dei triangoli ottenuti mediante rette passanti pei vertici di ABC o dei triangoli così ottenuti e limitate ai lati opposti.

Facendo la stessa operazione col segmento $A'C'$ si vede facilmente dalla fig. 19, che rappresenta la posizione più generale del triangolo $A'B'C'$ rispetto al triangolo ABC, che $A'B'C'$ si compone di triangoli ottenuti da ABC colla costruzione indicata e si vede pure che i triangoli di cui si compone $A'B'C'$ sono determinati allo stesso modo da $A'B'C'$.

Sia T la divisione in triangoli di ABC così costruita, e di cui alcuni α', α''... appartengono ad α. Il numero dei triangoli T è finito.

Scelto ora un altro triangolo β della divisione data o esso appartiene ad un triangolo T, ed allora si ripete la stessa costruzione in T per ottenere β e quindi anche β o una suddivisione di esso si ottiene da T allo stesso modo che α si ha da ABC. Oppure β sarà suddiviso in parti dai triangoli T. Ma la parte comune di un triangolo T con β, si divide in un numero finito di triangoli che si possono costruire in T e in β per mezzo di rette passanti pei suoi vertici o dei triangoli così ottenuti limitate ai lati opposti. Tale divisione si può eseguire generalmente in parecchi modi, ma per la dimostrazione si osservi che o la parte comune ha i suoi vertici distribuiti su tutti i lati dei triangoli T e β, oppure si possono dividere T e β in coppie di triangoli mediante rette passanti pei loro vertici e limitate ai lati opposti, in modo che la parte comune di ciascuna coppia si trova nella suaccennata posizione. Si vede poi facilmente che la parte comune si può allora scomporre in triangoli con un vertice comune in un vertice di essa e che si ottengono dai triangoli T e β nel modo anzidetto.

Così seguitando cogli altri triangoli γ.... della divisione data si ha da ABC un numero finito di triangoli ottenuti nel modo indicato e che compongono i triangoli α, β, γ...., se il numero di questi triangoli è finito.

Ma la somma dei segmenti associati ai triangoli $\alpha'\alpha''... \beta'\beta''... \gamma'\gamma''...$ ecc. è eguale al segmento associato al triangolo ABC, mentre le somme dei segmenti associati ai triangoli

$$\alpha'\alpha''... \quad \beta'\beta''... \quad \gamma'\gamma''... \text{ ecc.}$$

danno rispettivamente i segmenti associati ai triangoli α, β, γ ecc., dunque il lemma è dimostrato.

Def. II. — Dato un poligono convesso, si divida in triangoli. Se a ciascuno di questi triangoli si applica la costruzione della fig. 16, il segmento somma dei segmenti associati ai triangoli rispetto al segmento a chiamasi *segmento associato* al poligono *rispetto al segmento a.*

Data invece una figura poligonale per *segmento ad essa associato rispetto al segmento a* intendesi la somma di quelli associati ai triangoli rispetto al segmento a di cui la figura stessa è somma.

Oss. III. — Questo segmento dipende per ora dai triangoli della divisione.

Def. III. — Se il segmento associato ad una figura poligonale rispetto ad un segmento finito a è finito la figura dicesi *finita.*

Oss. IV. — I segmenti rettilinei, che sono limitati da due estremi, sono tutti fra loro finiti perchè soddisfano al post. d'Archimede (post. XII). Il segmento associato ad un triangolo (def. I) è dunque finito, e finito è anche il segmento associato ad un poligono convesso secondo la def. II. Il segmento associato ad una figura poligonale può essere illimitato, cioè non essere un segmento propriamente detto, ma un raggio rettilineo.

Se il post. XIII si limitasse ai soli poligoni, che anche se non sono convessi si possono considerare somme di un numero finito di triangoli, non occorrerebbe parlare di figure poligonali finite (vedi nota XXVIII).

Cor. — *Qualunque sia la divisione in triangoli di una figura poligonale, la somma dei segmenti associati ad essi è eguale al segmento associato alla figura data.*

Siano $T \equiv tt_1t_2...$ $T' \equiv t't_1't_2'...$ due divisioni in triangoli di una figura poligonale F, e siano s e s' i segmenti associati ad F secondo queste due divisioni (def. II); dico che si ha $s \equiv s'$. Infatti le due divisioni T e T' ne determinano una terza T'' di triangoli t'', t_1''.. che appartengono rispettivamente ai triangoli T e T'. I segmenti associati ai triangoli T'' hanno per somma un altro segmento s'' associato a F (def. II); ma i segmenti associati a quelli di essi che compongono un triangolo t_m di T hanno per somma il segmento associato a t_m, quindi $s \equiv s''$. Analogamente $s' \equiv s''$, dunque $s \equiv s'$, c. v. d.

Teor. — *Dividendo una figura poligonale finita in parti poligonali, trascurandone una non è possibile dividere in parti poligonali eguali la figura data e quella formata dalle parti rimanenti.*

O ancora:

Non è possibile dividere una figura poligonale finita in parti poligonali in guisa che, trascurandone una, si possa ricostruire la figura data disponendo le rimanenti in modo diverso.

Sia P la figura data, P' e P'' due delle sue parti tali che $P' + P'' \equiv P$. Alle P, P' e P'' sono associati tre segmenti s, s' e s'' tali che per la def. II e pel lemma II è $s' + s'' \equiv s$. Le parti di P' e P'' sono anche parti di P, e quindi i segmenti ad esse associati sono determinati mediante una divisione di P in triangoli.

Ora se P fosse equivalente a P', vi sarebbe una divisione di P e P' in parti poligonali e quindi anche in triangoli rispettivamente eguali. Ma i segmenti associati a triangoli eguali rispetto a un segmento sono eguali (def. I), dunque anche le somme dei segmenti dei triangoli eguali in P e in P' dovrebbero essere eguali. Ma queste sono sempre le stesse qualunque sia la divisione di P e P' in triangoli (lem. II e cor. I) dunque s e s' dovrebbero essere eguali, il che è assurdo essendo s'' diverso dal segmento nullo (oss. II).

Nota XXVII

Dimostriamo ora il post. XIV supponendo note le proprietà già dimostrate dell'equivalenza prima del postulato stesso e le nozioni sui segmenti proporzionali.

Lemma I. — *Ad un tetraedro e a quelli che da esso si ottengono dividendolo con piani passanti pei suoi spigoli si possono far corrispondere in modo determinato ed unico dei segmenti rettilinei tali che il segmento del tetraedro dato sia eguale alla somma dei segmenti corrispondenti ai tetraedri ottenuti con piani passanti per uno qualunque dei suoi spigoli.*

Il tetraedro dato $ABCD$ (fig. 20) si trasformi in un tetraedro equivalente $CFGH$ che abbia l'altezza di F eguale ad un segmento dato a e l'altezza di G nel triangolo CGH eguale pure ad a. La costruzione si fa conducendo un piano α parallelo alla faccia BCD alla distanza a e dalla parte di A, il quale taglia la faccia ABC secondo la retta r parallela a BC. Si trasforma il triangolo ACB nel triangolo equivalente

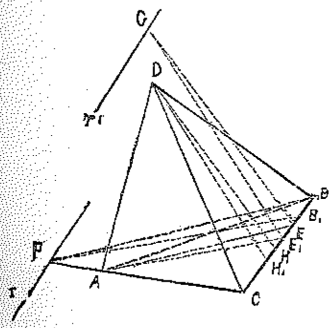

Fig. 20

CFE, si ha così il tetraedro $FCDE$ equivalente al dato colla altezza di F eguale ad a. Si trasforma poi il triangolo ECD nel triangolo CGH di cui l'altezza di G è pure a. Per segmento corrispondente al tetraedro $ABCD$ consideriamo il segmento CH, si ha:

$$\begin{aligned} CE : CB &= CA : AF \\ CH : CE &= CD : CG \end{aligned} \qquad (1)$$

Il segmento CH associato al triangolo DEC, come si sa rimane lo stesso comunque si applichi ad esso la costruzione della fig. 16.

Si consideri ora un piano γ parallelo ad un'altra faccia del tetraedro passante per D alla distanza a, ad es. alla faccia ABD dalla parte di C, e dimostriamo che si ottiene un segmento corrispondente al tetraedro $ABCD$ eguale al precedente CH. Il piano γ taglia la faccia ABC in una retta r_1 (fig. 21). Indichiamo con a_1 e a_2 le distanze delle rette r e r_1 dalle rette BC e BD, con h_1 e h_2 le altezze del vertice D nei triangoli ADB, CDB, con F', E', H' i punti analoghi ai punti F, E, H della fig. 20. I triangoli CFE, $AE'F'$ sono equivalenti al triangolo BCD, dunque:

(2) $$CE : AE' = a_2 : a_1 \qquad \text{(t. I, 86)}$$

Dimostriamo ora che:

(3) $$a_1 : a_2 = h_1 : h_2$$

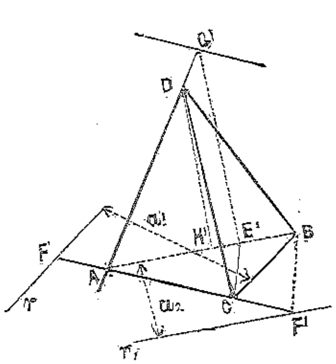

Fig. 21

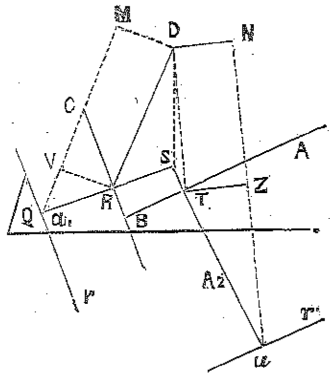

Fig. 22

Infatti sia DS perpendicolare al piano ABC (fig. 22), R e T i piedi delle altezze h_1 e h_2. La retta BC è perpendicolare a SR, e AB a ST. Per costruire a_1 basta condurre da D il segmento $DM \equiv a$ perpendicolare ad h_1 nel piano DRS e da M la parallela ad h_1 fino ad incontrare in Q la retta SR. Analogamente per a_2.

Conducansi per R e T i segmenti VR e TZ paralleli ed eguali ad AM e AN ossia ad a. Dalla figura si ha $\quad \widehat{VQR} \equiv \widehat{ARS}, \quad \widehat{TUZ} \equiv \widehat{ATS}$
dunque i triangoli rettangoli ASR, RVQ sono simili, quindi si ha:

$$QR : VR = AR : AS$$

ossia $$a_1 : a = h_1 : AS$$

Analogamente

$$a_2 : a = h_2 : AS$$

Da cui si ha appunto la (3).

Da (3) e (2) risulta pure:

$$CE : AE' = h_1 : h_2 \qquad (4)$$

Dalle figure 21 e 22 si ha anche:

$$CH : CE = h_1 : a$$
$$AH' : AE' = h_2 : a \qquad \text{(c. t. I, 79)}$$

Dalla (4) si vede che il rettangolo di AE' e h_1 è equivalente al rettangolo di CE e h_2 (t. I, 86), quindi

$$CH : CE = h_1 : a$$
$$AH' : CE = h_1 : a$$

donde $$CH : AH' = a : a$$

vale a dire $$CH \equiv AH' \qquad \text{c. v. d.}$$

Se nella costruzione della fig. 20 si scambia A con D e quindi la faccia ABC, con ABD per trovare il segmento corrispondente al tetraedro $ABCD$ bisogna condurre un piano δ parallelo alla faccia ABC alla distanza a. Considerando un parallelopipedo di cui due coppie di piani opposti siano appunto α, BCD; δ ABC, si dimostra facilmente che la retta d' intersezione di δ colla faccia DBC è alla distanza a_1 dalla retta BC.

Indichiamo ora con h_3 l'altezza di A nel triangolo ABC, e siano E'', H'' nello spigolo CB i punti analoghi ai punti F, H. Allora si ha:

$$CE : CB = h_3 : a_1$$
$$CE : CH = a : h_1$$
$$CE'' : CB = h_1 : a_1$$
$$CE'' : CH'' = a : h_3$$

Dalla 1ª e 3ª si ha:

$$CE : CE'' = h_3 : h_1$$

E da questa e dalla 2ª

$$CE'' : CH = a : h_3$$

quindi dalla 4ª

$$CH = CH''$$

Dunque possiamo concludere che la costruzione della fig. 20 conduce sempre allo stesso segmento corrispondente al tetraedro, qualunque sia la faccia e il vertice che si considerano.

Tornando ora alla fig. 20 osserviamo che ad ogni retta AB_1 che taglia la faccia ABC in due triangoli CAB_1, B_1AB corrisponde un piano DAB_1 passante per lo spigolo AD opposto a BC che taglia il tetraedro $ABCD$ nei due tetraedri $ADBB_1$, ADB_1C. Al secondo di questi tetraedri corrisponde il segmento CH_1 costruito come CH, e si ha:

$$\begin{aligned} CE_1 : CB_1 &= CA : AF \\ CH_1 : CE_1 &= CD : CG \end{aligned} \qquad (5)$$

Il segmento CH_1 corrispondente al tetraedro $ADCB_1$ si ottiene applicando anche la costruzione della fig. 20 al tetraedro stesso.

Dalle (1) e (5) si ha:

$$EE_1 : BB_1 = CA : AF$$
$$HH_1 : EE_1 = CD : CG$$

Il segmento HH_1 corrisponde dunque al tetraedro $ADBB_1$ applicando ad esso la costruzione della fig. 20 come al tetraedro $ABCD$. Infatti se si applica direttamente la costruzione al tetraedro $ADBB_1$ si trovano due segmenti $E'E_1'$, $H'H_1'$ che soddisfano alle due ultime proporzioni, perciò essi sono eguali rispettivamente a EE_1 e HH_1, il che dimostra che HH_1 è il segmento corrispondente al tetraedro $ADBB_1$. Il lemma è dunque dimostrato.

Oss. I. — Anche pel tetraedro osserviamo che il segmento corrispondente ad un tetraedro secondo il lemma I non è mai nullo e che il segmento corrispondente ad ogni tetraedro ottenuto dal tetraedro dato $ABCD$ con un piano passante per uno degli spigoli di $ABCD$ fino all'incontro dello spigolo opposto si ottiene applicando direttamente al tetraedro la costruzione della fig. 20 come se esso non facesse parte di $ABCD$.

Def. I. — Il segmento corrispondente ad un tetraedro secondo la costruzione della fig. 20 si chiama segmento *associato* al tetraedro *rispetto al quadrato di lato a.*

Lemma II. — *Qualunque divisione di un tetraedro in tetraedri α, β, γ... o una suddivisione di essi in tetraedri, si ottiene mediante piani che passano per gli spigoli del tetraedro* ABCD *limitati agli spigoli opposti, o per gli spigoli dei tetraedri così ottenuti, e così via.*

La somma dei segmenti associati ai tetraedri α, β, γ... è eguale al segmento associato al tetraedro.

La dimostrazione procede cogli stessi criterî di quella del lemma II dato pel triangolo (nota XXVI).

Se α, β, γ sono ottenuti colla costruzione indicata nel lemma stesso, cioè mediante piani passanti per gli spigoli del tetraedro $ABCD$, allora l'ultima parte deriva senz'altro dal lemma I colla costruzione indicata nella fig. 20.

Se invece α, β, γ... non sono ottenuti in questo modo, si prolunghi una faccia della divisione, ad es. di α, fino ad incontrare la superficie del tetraedro $ABCD$, Si otterrà così una suddivisione della divisione data, la quale a sua volta può scomporsi in tetraedri se tutte le sue parti non lo fossero. Qui si possono presentare quattro casi:

1. Il piano passa per uno spigolo del tetraedro tagliandolo in due tetraedri (fig. 23).

2. Il piano passa per un vertice, ad es. A e taglia due spigoli della faccia opposta in due punti, ad es. BC e BD, nei punti X e Y. In tal caso il tetraedro $ABCD$ resta diviso nel tetraedro $ABXY$ e nella piramide $AXYDC$, la quale viene divisa a sua volta dal piano ADY in due tetraedri $ADXY$, $ADCY$. Questi tre tetraedri si ottengono dapprima tagliando $ABCD$ col piano ADY e il tetraedro $ABDY$ col piano AYX (fig. 23).

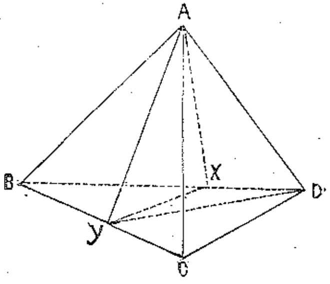

Fig. 23

3. Il piano taglia tre spigoli concorrenti in un punto ad es. A in X, Y, Z. Il tetraedro resta diviso nel tetraedro $AXYZ$ e nel poliedro convesso $BCDXYZ$, il quale viene diviso dal piano BYZ nel tetraedro $BXYZ$ e nel poliedro $BCDYZ$, che a sua volta è diviso dal piano BDY nei due tetraedri $BDYZ$, $BCDY$. Questi quattro tetraedri in cui resta diviso $ABCD$ si ottengono conducendo dapprima il piano BDY che lo taglia nei due tetraedri $BCDY$, $ABDY$; poi tagliando il secondo col piano BYZ si hanno i due tetraedri $ABYZ$, $BYZD$ e finalmente tagliando il primo col piano YZX si hanno i due tetraedri $AXYZ$, $BXYZ$ (fig. 24).

4. Il piano taglia due coppie di spigoli opposti ad es. AB, DC; AC, BD. Ciò è possibile, perchè il piano XYZ incontra la faccia BCD in una retta la quale incontrando già il lato BD di essa in un punto interno Z deve tagliare un altro lato in un punto interno. Ma questo lato non può essere BC, chè altrimenti il piano coinciderebbe colla faccia ABC, dunque deve incontrare CD in un punto interno W. Si hanno così le due parti convesse $BCXYZW$, $ADXYZW$ (fig. 25). La prima viene divisa dal piano BYZ nel tetraedro $BXYZ$ e nella piramide $BCYZW$, e questa nei due tetraedri $BCYZ$, $CYZW$ col piano CYZ. La seconda invece viene divisa dal piano AYZ nel tetraedro $AXYZ$ e nella piramide $ADYZW$ la quale viene divisa alla sua volta nei tetraedri $ADYZ$, $DYZW$ dal piano YZD. Questi sei tetraedri, in cui viene decomposto il tetraedro $ABCD$ si possono ottenere nel modo indicato dal lemma. Cioè:

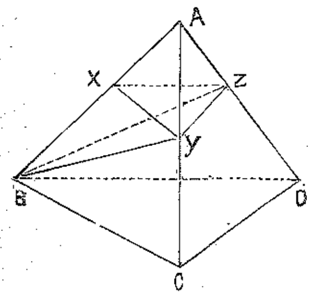

Fig. 24

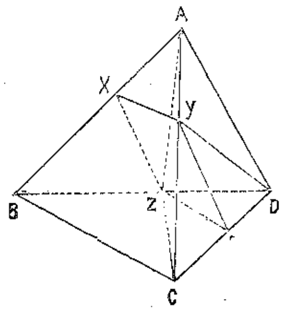

Fig. 25.

$ABCD$ viene diviso dal piano BDY nei due tetraedri $YABD$, $YBCD$; $YABD$ dal piano CYZ nei tetraedri $BYZC$, $CYZD$; e questo dal piano YZW nei tetraedri $CYZW$, $DYZW$. Analogamente pel tetraedro $YABD$.

In ognuno di questi casi la somma dei segmenti associati ai tetraedri di $ABCD$ è eguale a quello di $ABCD$. Scelgasi ora un' altra faccia della divisione debitamente prolungata fino ad incontrare le superficie delle parti convesse dei tetraedri in cui fu diviso il tetraedro $ABCD$ dal primo piano e nelle quali essa è in parte o in tutto contenuta. Questa faccia così prolungata incontrerà la superficie di questi tetraedri in uno dei modi sopra indicati, in guisa che applicando le costruzioni precedenti, le parti determinate dal primo e dal secondo piano in $ABCD$ debitamente prolungati rimarranno divise in tetraedri ottenuti mediante piani passanti per gli spigoli di $ABCD$ e dei tetraedri così ottenuti, e così via.

Così continuando con una terza e quarta faccia del tetraedro α, α risulta formato da un numero finito di tetraedri $\alpha' \alpha''$... ottenuti nel modo suddetto. I tetraedri $\alpha' \alpha''$... si ottengono colla stessa costruzione anche da α. Applicando ora la stessa costruzione ai tetraedri rimanenti β, γ ecc. come si è indicato pei triangoli, la prima parte del lemma riesce dimostrata.

Ma la somma dei segmenti associati di

$$\alpha'\alpha'' ..., \ \beta'\beta'' ..., \ \gamma'\gamma''$$

è eguale al segmento associato nel tetraedro $ABCD$, mentre per la def. I le somme dei segmenti associati ai tetraedri $\alpha'\alpha''$..., $\beta'\beta''$..., $\gamma'\gamma''$... danno i segmenti corrispondenti ai tetraedri α, β, γ... Dunque il lemma è dimostrato.

Def. II. — Divisa una figura poliedrica in tetraedri, la somma dei segmenti corrispondenti a questi tetraedri chiamasi *segmento associato* alla parte poliedrica.

Lemma II. — *Qualunque sia la divisione in tetraedri di una figura poliedrica, la somma dei segmenti associati ad essi è eguale al segmento associato alla figura data.*

La dim. è analoga a quella del cor. del lemma II dei poligoni. *E finalmente si dà la dimostrazione del postulato XIV come quella del post. XIII.*

Nota XXVIII, pag. 318

Al n. 92 abbiamo generalizzata la definizione dell'equivalenza data per le figure poligonali e poliedriche e per le parti poligonali di esse (def. IV, 67) e per i i tetraedri (def. II, 92) dicendo:

Due figure sono equivalenti quando sono somme di parti ciascuna a ciascuna eguali, od anche quando sono limiti di figure eguali od equivalenti.

La dim. del post. XIII per le parti qualunque di una figura poligonale o del post. XIV per le parti qualunque di una figura poliedrica è analoga a quella del cerchio e della sfera (t. IV, n. 92 e t. V, n. 94).

Dopo tale definizione due figure possono essere equivalenti anche quando le parti eguali in cui si scompongono le due figure non siano poligonali o poliedriche, *ed allora si può dimostrare che due poligoni equivalenti,* anche secondo la def. VI del n. 92, *si possono sempre scomporre in un numero finito di triangoli ad uno ad uno rispettivamente eguali.*

Di una tale dimostrazione non vi è bisogno nel testo appunto perchè la def. data prima del n. 92 (def. IV, 67) riguarda solo le parti poligonali delle figure poligonali. Ma quando si dà, come si fa ordinariamente, la definizione dell'equivalenza addirittura per parti qualunque delle figure, allora la dimostrazione è necessaria quando per dimostrare ad es. la equivalenza di due prismi, che hanno sezioni normali equivalenti e agli spigoli laterali eguali, si suppone che le sezioni normali equivalenti siano scomponibili in triangoli eguali. Una tale dimostrazione è accennata invece negli Elementi di De Paolis, ma manca affatto negli altri trattati da me conosciuti, e tale mancanza è un errore che bisogna evitare anche perchè intuitivamente non si vede affatto che se due poligoni sono equivalenti in modo qualunque, essi possano essere divisi in triangoli rispettivamente eguali.

Oss. Il post. dell'equivalenza dato ordinariamente è in sostanza questo: *Se si scompone una grandezza finita in parti, trascurandone una non si può ricomporre il tutto colle parti rimanenti.*

Quale sia una grandezza *finita* e quali siano le *parti* di essa non si dice, sicchè come abbiamo veduto si supplisce tacitamente a questa mancanza con altri postulati.

Fu proposto nel *Periodico di Matematica* (Vol. X, fasc. V-VI) di definire la grandezza finita come quella nella quale la sottrazione ripetuta di una sua parte da essa ha un termine. Allora bisogna stabilire con un *postulato* che i poligoni, poliedri ecc. sono figure finite. Così si cambia la forma ma la sostanza della questione rimane la stessa. E fu anche ivi asserito erroneamente che il postulato è indimostrabile perchè esso è la traduzione della proprietà di finito attribuita alla parte interna del poligono, come se fosse necessario per definire la parte interna del triangolo e del poligono ricorrere al concetto di finito. Ed invece di tale concetto si può far senza dimostrando prima il post. XIII pel triangolo, poi pel poligono convesso e quindi per le figure poligonali composte di un numero n di poligoni convessi, seguendo proprio lo stesso metodo sopra indicato.

La definizione suddetta di grandezza finita ha poi quest'altro difetto che non ha il postulato dato comunemente, e cioè che ogni grandezza caratterizzata dalla proprietà della definizione è *finita*, mentre il concetto del finito dipende dal post. d'Archimede (post. XII), perchè vi sono figure infinite attuali che godono la stessa proprietà.

Anche per le osservazioni fatte alle note XXIV e XXVIII mi pare che il metodo seguito nel testo col quale si definisce l'equivalenza dapprima rispetto alle parti poligonali e poliedriche fino alla teoria del cerchio e dei corpi rotondi, sia da preferirsi oltre che scientificamente anche didatticamente. D'altronde questa teoria non è nel testo più estesa di quanto lo sia in altri trattati diffusi nelle nostre scuole. Oltre a ciò essa offre il vantaggio che i postulati XIII e XIV sono proposizioni che l'insegnante può chiedere allo scolaro (come può chiedere in mancanza di tempo quelle analoghe pel cerchio e pei corpi rotondi) non solo basandosi sull'intuizione ma eziandio sul fatto che esse sono dimostrabili.

Sistema lineare omogeneo e continuo di grandezze

Nota XXIX, pag. 246

Nel testo è definito questo sistema colla corrispondenza alla retta, in modo che si possono trasportare alle grandezze del sistema i teoremi dimostrati pei segmenti corrispondenti della retta. E ciò didatticamente è certamente più semplice, poichè si si giova di un ente che già si conosce logicamente e intuitivamente, e fa rilevare inoltre l'importanza che ha la retta non solo come figura fondamentale di costruzione della geometria, ma eziandio come figura di riferimento.

Si potrebbe dare però la definizione di tale sistema indipendentemente dalla retta stabilendo per esso le proprietà fondamentali corrispondenti ai postulati della retta in sè *).

*) Vedi anche *A.* assioma d'Archimede e il continuo rettilineo, Atti della R. Acc. dei Lincei, 1890.

Definizione di rapporto

Nota XXX, pag. 260

Nel testo ho introdotto per maggior semplicità didattica la parola *rapporto* fra A e B e A' e B' per indicare che A e B, A' e B' sono proporzionali (d. I. 76). Nei F. G. ho definito per rapporto di A a B la stessa coppia AB in quanto si considera la costruzione di A mediante multipli e summultipli di B o mediante il limiti di una serie di multipli o di summultipli di B (F. G. pag. 172). Il rapporto non è dunque la stessa coppia AB, ma un contrassegno di essa. E tale definizione mi pare scientificamente più propria, perchè il rapporto è così un attributo della coppia, e non è una parola per indicare un fatto che avviene fra due coppie e che si esprime già dicendo che le coppie sono proporzionali. E come nei F. G. abbiamo sempre seguito il principio di ricavare le nozioni matematiche dalle operazioni del pensiero stesso, così abbiamo sempre preferito di dare le definizioni matematiche più rispondenti alla natura delle cose definite.

Probl. IV e V n. 88

Nota XXXI, pag. 304

La dimostrazione data nel testo di questo problema è dovuta sostanzialmente a De Paolis (Elementi di geom. 1884). Essa ha il pregio di essere indipendente dalle proporzioni e dall' equivalenza.

Se non si dà il teor. VI n. 38 e quindi neppure il probl. IV n. 88 e la soluzione I della costruzione del pentagono regolare, dato il lato, (probl. V, 88), si può servirsi per questo problema della soluzione II.

Numeri razionali e irrazionali

Nota XXXII, pag. 344

Nell' introduzione dei F. G. le definizioni dei numeri reali ordinari sono ottenute mediante la rappresentazione sulla forma fondamentale, e quindi l' insegnante può servirsi della retta tale e quale noi l'abbiamo definita (post. II, XI e XII) per giustificare l'introduzione dei numeri irrazionali nell' algebra.

Semplificazioni e altre osservazioni didattiche

Def. II, pag. 8.

Nel sistema lineare chiuso tutti gli elementi soddisfano alla 1ª condizione a cui soddisfano gli elementi della serie (n. 2), perchè quando si considera il sistema in un dato verso a cominciare da un suo punto, se dopo avere considerati tutti o in parte gli altri elementi si considera nel verso dato di nuovo il punto A, esso si considera allora come un nuovo punto A_1, cioè come secondo estremo di un segmento di cui il primo è A e il secondo A_1 coincide con A.

Post. II.

Per maggiore chiarezza la proprietà III si può esporre così:

Dato sulla retta un punto A *e un segmento qualunque* XY *esistono in un verso dato due segmenti l'uno col primo estremo l'altro col secondo estremo in* A *eguali ad* XY.

Volendo si può dare subito dopo il post. II il postul. IV, che distingue la retta da altre linee che pur soddisfano al post. II.

Teor. I, pag. 12.

Si può semplificare la dimostrazione così:

Un punto A di un sistema lineare è un nodo quando a cominciare da A in un dato verso si ottiene nuovamente A; poi altri punti distinti da quelli considerati.

Indichiamo con A_1 il punto A stesso nella seconda posizione, cioè come secondo estremo del segmento ABA_1. Si prenda in questo segmento un punto B e da A_1 nel verso di AB il segmento $A_1B_1 \equiv AB$, cosicchè AB, A_1B_1 sono affatto distinti, ma possono considerarsi entrambi con l'origine A; si avrebbero perciò due segmenti col primo estremo A dello stesso verso, contro il post. II.

Teor. II, pag. 13.

Nell'enunciato è meglio sostituire la retta al sistema lineare omogeneo, avendo dato il post. II per la retta indipendentemente dalla def. II, pag. 12.

Seguendo la dim. del testo sarà bene che l'insegnante osservi alla fine che se AB e DE sono i segmenti dati, si può sempre costruire un segmento $AC \equiv DE$ dello stesso verso di AB e che per ciò si ricade nel caso precedente.

Si può semplificare la dim. così:

Siano AB, DE i due segmenti dati. Esiste un solo segmento AC nel verso di AB eguale a DE (post. II, 3 e 2) e non può darsi che uno dei tre casi seguenti: o C nel verso dato cade in B, o C precede B ossia C è interno ad AB, o C segue B ossia B è compreso fra A e C nel verso dato. Dunque nel primo caso AC coincide con AB, quindi è $AC \equiv AB$ (post. II). Nel secondo caso è AC parte di AB e perciò è $AC < AB$, e nel terzo è $AC > AB$.

Teor. I, pag. 14.

Si sostituisca la dim. colla seguente più semplice:

Sia $AB \equiv a$, $BC \equiv b$, AC somma di di $a + b$. Per essere $AC \equiv CA$ (post. II, 2) esiste in CA un punto B' tale che $CB' \equiv a$, $B'A \equiv b$ (post. II, 1); e per essere $AB' \equiv B'A$ e $BC' \equiv CB'$ sarà $AB' \equiv b$, $B'C \equiv a$, cioè AC è pure somma dei segmenti b ed a.

Oss. Se l'insegnante vuol dimostrare la legge commutativa della somma anche per n segmenti, allora o potrà dimostrarla dopo il teor. II pag. 25, oppure potrà premettere il teor. II al teor. I senza alcun inconveniente, dimostrando quella legge alla fine della dim. del teor. I. Pel teor. II pag. 25 osserverà che la dimostrazione data per tre segmenti si estende facilmente al caso di n segmenti. Questa estensione la potrà fare lui stesso nella scuola oppure proporla agli scolari come esercizio.

Def. II, pag. 23.

La definizione delle figure eguali è subordinata all' esistenza di segmenti eguali in rette diverse, il che viene ammesso subito dopo il post. V. Volendo, si può premettere alla def. il postulato stesso per affermare prima della definizione l' esistenza di segmenti eguali in rette diverse. Questo metodo di dare le definizioni dopo aver provata l' esistenza di figure a cui si riferiscono è generalmente seguito nel testo; talora però, come ho detto nella prefazione, è opportuno darle poco prima. Così ad es. ho data la def. di sistema lineare prima di affermare l' esistenza di un tale sistema mediante il post. II.

Il significato della parola *eguale* nella def. II suddetta è indicato dal fatto della definizione stessa; l'alunno con questa parola non deve pensare ad altro. Subito dopo, come nel testo (oss. emp. n. 14), si fa vedere che la definizione è verificata empiricamente colla sovrapposizione delle due figure.

Ma l' insegnante può seguire il metodo inverso, cioè ricavare la def. II da qualche osservazione empirica, ad es. anche dal movimento senza deformazione, come nell' oss. emp. del n. 5 e del n. 14 stesso. I punti corrispondenti in due posizioni A e B del corpo sono quelli occupati successivamente dal corpo stesso,

ma la definizione nel testo è indipendente dal movimento e comprende anche le figure simmetriche. Sarà opportuno che l'insegnante nel principio la ripeta quando viene applicata a figure particolari e faccia esercitare i giovani a risolvere qualcuno degli esercizî proposti alla fine del libro. Dopo ciò essi troveranno assai facile la teoria dell'eguaglianza delle figure in ogni caso che loro si presenti.

Teor. II, pag. 23.

Per chiarire il concetto di parte di una figura si richiami la def. di figura (n. 5) e la def. di parte di un gruppo (n. 1).

Def., pag. 26.

Sarà opportuno di ripetere la definizione di figura rettilinea nel caso della coppia di rette e di raggi sia illimitati sia limitati al vertice della coppia.

Teor. I, pag. 27.

I raggi delle coppie opposte sono considerati come illimitati. Ma anche se si considerano i raggi a e b limitati al punto O, le parti rimanenti dei raggi della coppia rettilinea ab, corrispondono alle parti rimanenti della coppia rettilinea eguale ba, e si ritorna al caso di prima.

Oss. Per raggio secondo la def. IV, n. 7 intendesi tanto tutta la retta quanto la semiretta considerata in un dato verso, nel secondo caso a partire dal suo estremo. Così nella coppia di raggi (def. n. 16) i raggi possono essere illimitati e limitati dal vertice della coppia, ma quando non è detto diversamente si può intendere il raggio sia nell'uno come nell'altro senso, senza alcuna confusione. Per gli alunni è forse più opportuno considerare il raggio limitato; ma di ciò lascio giudici gli insegnanti, i quali o possono fare questa distinzione laddove la credono opportuna, come ho sopra accennato pel teor. I, pag. 27; oppure possono anche fin dalla def. IV del n. 7 dichiarare esplicitamente che per raggio s' intenderà in seguito il solo raggio limitato.

Cor., pag. 32.

Questo cor. è bene sostituirlo con questo più semplice:

Cor. *Se il punto* A′ *è situato sul raggio* PA *a partire da* P *verso* A *e se il punto* X *è interno al segmento* AB, *la retta* PX *incontra sempre la retta* A′B′, *se* A′B′ *è parallela ad* AB, *oppure se* A′B′ *coincide con* A′B.

Vale la stessa dimostrazione; se ne tralascia però l'ultima parte che si riferisce al caso non considerato in questo cor.

Teor. II, pag. 33.

In seguito alla modificazione precedente nella dimostrazione di questo teorema si scelga per segmento YZ_1 il segmento AZ_1 stesso, in modo cioè che Y_1 cada in A. La dimostrazione resta la stessa, anzi si semplifica poichè in luogo dei due triangoli PBY_1, PBZ_1 basta considerare il triangolo PBZ_1 perchè il punto Y coincide col punto A stesso.

Def. I, pag. 35-36.

Aggiungasi se credesi per maggior chiarezza:

Per determinare i versi di un fascio di raggi limitati al centro si determinino dapprima i versi della parte del fascio i cui raggi incontrano la direttrice r mediante quelli di r. I versi della parte rimanente sono stabiliti dai precedenti. Il raggio della parallela, condotta pel centro del fascio alla direttrice, che segue i raggi che incontrano la r nel verso da A a B è precisamente PD. A questo seguono i raggi opposti dei raggi che incontrano la r nel verso da A a B. Analogamente pel raggio parallelo opposto. Laddove si parla del fascio senza che risulti se il suo elemento è la retta o il raggio, è indifferente considerare l'uno o l'altra.

Teor. II, pag. 37.

Per rendere la prima parte della dimostrazione più chiara si aggiunga dopo il punto della penultima riga di p. 37 « e per ciò anche $P'X$ parallela a PB (c. t. I).

E nell'ultimo periodo si osservi che pel primo caso

Pr coincide con $P'r$, pel secondo caso $P'r$ coincide con $P'r'$ e quindi Pr con $P'r'$.

Def. I, pag. 39.

Dopo il primo punto aggiungi « limitati al centro » (vedi oss. precedente). È meglio dare dopo questa def. quella dell'angolo di due rette (def. V pag. 46).

Teor. I, pag. 39.

Se si vuole chiarire ancora più la dim. di questo teorema si osservi che pel post. VIII sopra citato se A è interno di CA' anche B è interno di CB' e viceversa. Nella figura suppongo dato il primo caso. Si dimostri che se X' è interno ad $A'B'$, X è pure interno ad AB. Per far ciò allorchè si è dimostrato che X' è interno ad $A'B'$, si supponga anche che X sia esterno ad AB. La retta CX incontra necessariamente la retta $A'B'$ in un punto X (post. VIII). Considerando l'angolo $X'CB'$, essendo A interno al segmento XB, sarà A' interno al segmento $X'B'$, vale a dire X' esterno al segmento $A'B'$.

Se ora è dato il punto X' interno ad $A'B'$, la retta CX' deve incontrare AB in un punto interno X_1, chè altrimenti X' per la dimostrazione precedente dovrebbe essere esterno ad $A'B'$.

La dimostrazione continua poi come nel testo, cioè « se poi B ecc. ».

Teor. I, pag. 46.

Per chiarire che la retta r è parallela a s, si osservi che pel cor. pag. 40 il fascio può esser generato dal suo centro e da una retta qualunque del suo piano e quindi anche dalla retta r parallela ad s.

Se si crede si osservi nella dimostrazione che se il punto A' è esterno al segmento PA nel raggio PA, anche B' deve essere esterno al segmento PB nel prolungamento del raggio PB (post. VIII).

Non ho fatto l'osservazione perchè essa è intuitiva. Come ho già detto nella prefazione non ho voluto essere sempre minuzioso, lasciando talora dei passaggi semplici indimostrati sia per lasciare una parte anche all'intuizione, senza fare però mai uso tacitamente di postulati, sia anche per lasciarli svolgere all'insegnante o ai giovani stessi.

Teor. I, pag. 49.

Se si crede, per chiarire che CE non può esser parallela ad AB, si ricordi il teor. I, pag. 39.

L'insegnante può dare come cor. di questo teor. o come esercizio, la seguente proposizione:

Un segmento cogli estremi su due lati di un triangolo o interni al triangolo è interno al triangolo.

Sia XY il segmento dato cogli estremi X e Y sui lati AB, AC del triangolo ABC. Il triangolo ABY è interno al triangolo ABC, e il triangolo AXY è interno al triangolo AYB, dunque AXY e per ciò anche XY è interno al triangolo ABC. Se XY sono interni al triangolo, congiunti X e Y con A fino ad incontrare in X', Y' il lato BC, il triangolo XAY è interno al triangolo $X'AY'$, questo è interno al triangolo ABC, dunque ecc.

Tale cor. è sottinteso nella dim. del teor. I pag. 79 perchè, si tratta di una prop. intuitiva e di facile dimostrazione.

Def. I, pag. 50.

Invece di considerare come nel testo il perimetro del triangolo appartenente alla parte esterna si può considerarlo come limite della parte interna ed esterna, senza attribuirlo nè all'una nè all'altra. In tal caso bisogna tenere lo stesso metodo per la parte interna ed esterna delle altre figure.

Oss. II e def. III, pag. 50.

Esse possono essere tralasciate nell'insegnamento. È

facile dimostrare che un angolo piano esterno del triangolo, quello ad es. di vertice A e che è situato dalla parte opposta di C rispetto ad AB, contiene il prolungamento del lato CB, da C verso B, cioè contiene l'angolo opposto all'angolo interno di vertice B (fig. 48). Infatti il raggio CB limitato in C è situato dalla stessa parte di B rispetto alla retta AC e il prolungamento del lato CB è situato dalla parte opposta di C rispetto ad AB.

Teor. II, pag. 53.

Nel caso che si creda di dare questo teor. (vedi avvertenze) per rendere più chiara la dimostrazione si faccia anche la figura in cui i punti $A_1 A_1'$ sono sulle rette r e r' da parte opposta rispetto alla retta AA' nel piano.

Teor. I, pag. 56.

Se par necessario si aggiunga: che l'eguaglianza degli angoli APB, BPA dà l'eguaglianza delle coppie rettilinee a cui appartengono (lem. pag. 41) e che in queste coppie ai punti AMP dell'una corrispondono i punti BMP dell'altra, e perciò all'angolo AMP l'angolo BMP, che sono per conseguenza eguali (def. II, 14).

Quando però gli scolari hanno fatto pratica abbastanza dell'applicazione della def. II del n. 14, allora essi vedono la dimostrazione di queste cose a volo, senza bisogno che l'insegnante vi insista con troppa minuzia.

Def. III, pag. 73.

Si faccia seguire questa def. subito dopo la def. II della stessa pagina.

Si aggiunga nella definizione che alla parte interna appartengono anche i lati dei triangoli in essa considerati del poligono.

Teor. I, pag. 73.

Se nell'enunciato si aggiunge anche il caso che il punto che la retta ha in comune col poligono è sul perimetro di esso, allora la dim. può darsi colla legge di conclusione da n a $n+1$, essendo stato dimostrato il teorema pel triangolo (t. II e III, pag. 50 e 51).

Oss. pag. 73.

Che ogni poligono convesso si possa scomporre in triangoli con un vertice in un vertice del poligono è assai facile dimostrare tenendo conto che detti $V_1, V_2, \dots, V_n$ i vertici del poligono, che si seguono nell' ordine $V_1 V_2 \dots V_n$, i vertici si dividono in due gruppi rispetto ad una diagonale ad es. $V_1 V_3$, cioè V_2 e $V_4 \dots V_n$ che sono situati da parti opposte rispetto a $V_1 V_3$. Infatti se ad es. il vertice V_m del secondo gruppo fosse situato dalla stessa parte rispetto a $V_1 V_3$, e detto V_{m+1} il primo vertice dopo V_m situato dalla parte opposta (tale caso dovrebbe presentarsi sempre perchè vi sono vertici situati da parti opposte di V_2 rispetto a $V_1 V_3$) $V_m V_{m+1}$ incontrerebbe $V_1 V_3$ in un punto interno, e quindi non sarebbe soddisfatta la def. II.

La parte però dell' oss. che riguarda la scomposizione in triangoli con un vertice comune nell' interno del poligono è meglio darla dopo il teor. I. Sebbene questa prop. sia intuitiva, la dim. si può dare nel modo seguente:

Qualunque sia il vertice che si sceglie secondo la def. III per costruire la parte interna del poligono essa rimane sempre la stessa. Basta osservare che tutti i segmenti che uniscono i punti del perimetro sono interni al poligono, come risulta dalla dim. del teor. I, 73 (vedi cor. del teor. I, pag. 49 sopra accennato). Congiungendo ora un punto P interno al poligono coi vertici $V_1 V_2 \dots V_n$ si ottengono dei triangoli tutti interni al poligono, perchè i segmenti che uniscono P con un lato ad es. $V_1 V_2$ del

poligono e che determinano la parte interna del triangolo $P V_1 V_2$ sono tutti interni al poligono.

Che due triangoli determinati da P con due lati del poligono non abbiano alcun punto interno comune si dimostra così:

Il poligono sia diviso nei triangoli che hanno per vertici V_1 e per lati i lati e le diagonali del poligono (fig. 79). Il punto P o sarà in una diagonale passante per V_1 o sarà interno ad uno dei triangoli suddetti. Sia P interno ad es. al triangolo $V_1 V_3 V_4$. Nell' interno del triangolo $V_1 V_3 V_4$ non vi è alcun vertice del poligono, perchè il vertice V_2 e i vertici $V_4 V_5 \dots V_n$ sono situati da parti opposte della diagonale $V_1 V_3$. e i vertici $V_2 V_3$, $V_5 V_6 \dots V_n$ sono situati da parti opposte della diagonale $V_1 V_4$, di guisa che nessun vertice, ad es. V_m, può essere situato dentro al triangolo $V_1 V_3 V_4$, perchè è situato dalla parte opposta di V_3 rispetto alla diagonale $V_1 V_4$.

Essendo V_2 e V_n successivi di V_1 da parti opposte delle diagonali $V_1 V_3$, $V_1 V_4$ e quindi anche della retta $V_1 P$, gli angoli $V_2 P V_1$, $V_1 P V_4$ non hanno alcun punto interno comune. Per la stessa ragione non hanno alcun punto interno comune gli angoli $V_2 P V_3$ $V_3 P V_4$, nè questo può avere alcun punto comune interno con $V_1 P V_n$ perchè V_3 è situato dalla parte opposta di V_n rispetto alla diagonale $V_1 V_4$. Così seguitando il teor. resta dimostrato, e resta così anche pienamente dimostrato che il poligono, come asserisce la 2ª parte dell'oss. di p. 73, può scomporsi in triangoli con un vertice nell' interno del poligono.

Def. V, pag. 76.

Correggere l'errore di stampa nella def. del trapezio. È utile dopo la definizione o prima di dimostrare come si costruiscono il rombo, il rettangolo e il quadrato.

Teor. I, pag. 79.

Si completi la dim. aggiungendo dopo il primo periodo:

Essendo $OA \equiv OB$, il piede P della perpendicolare condotta da O ad AB è interno al segmento AB (t. III, 27), dunque ogni punto interno ad AB ha una distanza dal centro O minore del raggio (t. III, 27), dunque AB è interno al cerchio.

È preferibile dare questa forma più completa al teor. stesso:

Un segmento cogli estremi interni al cerchio o sulla circonferenza è interno al cerchio.

La dim. precedente presuppone la stessa proposizione pel triangolo (vedi il cor. del teor. I, 49 sopra enunciato).

Si può darne un' altra indipendente da quella proposizione, così:

Siano X e Y interni al cerchio o sulla circonferenza si avrà $OX \leq OY \leq OA$, essendo OA il raggio del del cerchio (fig. 87). Se il piede P della perpeudicolare condotta da O alla retta XY, cade nell' interno del segmento XY o nel punto X, allora OY sarà l' obliqua maggiore dei punti interni al segmento XY dal punto O, e perciò ogni punto di (XY) è interno al cerchio.

Se invece P cade fuori di (XY), esso sarà situato dalla parte di X (t. III, 27), e quindi anche in tal caso ogni punto interno di (XY) è interno al cerchio.

Teor. II, pag. 85.

Per dimostrare che si può scegliere il segmento OA' maggiore del raggio si proceda così. Si conduca la perpendicolare t in X ad un raggio OX non perpendicolare alla retta data; essa incontra questa retta in un punto A', tale che OA è maggiore del raggio (t, III, 27).

Teor. I, pag. 94.

Se l' insegnante dimostra questo teorema dimostri o faccia

prima dimostrare come esercizio agli scolari il teor. inverso del teor. V pag. 61.

Oss. II, pag. 108.

Per chiarire ancora meglio la def. di retta all' infinito, si aggiunga dopo l' ultimo punto « perchè questi determinano con P' due rette del fascio di centro P', essendo P' un punto qualunque ».

S' intende che i punti P e P' sono punti effettivi.

Teor. I, pag. 109.

Lo scolaro deve concepire per *spazio* la figura definita alla fig. 1 del n. 38 che per il post. I corrisponde allo *spazio fisico*, in guisa che le proprietà dedotte per quella figura si possono eseguire praticamente nei limiti dell' osservazione e cogli istrumenti di cui possiamo disporre nello spazio fisico.

Il teor. I è necessario appunto perchè dal post. X non si deduce che tutto l' insieme di punti che si possono considerare *logicamente*, in base cioè ai postulati indipendentemente dall' intuizione, soddisfi al post. pratico I, ossia alla def. I del n. 38 (pag. 108).

Se si volesse tralasciare tale distinzione (che ritengo utile acciocchè risulti nettamente la differenza tra lo spazio geometrico e lo spazio fisico) si può farlo facilmente: basta dare come post. X il post. pr. I. In tal caso il teor. I di pag. 109 non è necessario *).

---

*) Nel libro III prima della def. I di pag. 108 non faccio uso della parola spazio, e quindi le proposizioni che la precedono ad es. il teor. I, pag. 105, riguardano la classe di punti determinata dai post. I-IX. Ma dopo quella definizione è chiaro (anche se ciò non è detto in ogni proposizione ad es. nei teor. del § 3) che tutte le proposizioni si riferiscono alla figura data dalla def. I di pag. 108. Per conseguenza non vi è bisogno di alcuna ipotesi.

Teor. VIII, pag. 130.

I teor. VII,..., X di questo numero devono esser segnati evidentemente coi numeri VI.... IX.

Si premetta il caso *c)* al caso *b)*.

Per completare la dim. del caso *b)* si dica alla fine e quindi p' è perpendicolare ad AB e $A'B'$. Scelta un'altra perpendicolare p_1 ai piani π e π', p' è parallela a p_1 (*c*) « e quindi si ha un nuovo rettangolo $A_1A_1'\,BB'$ ed in guisa che p' è pure perpendicolare alle rette A_1B, $A_1'B'$ cioè ai piani π e π'.

Post. XI.

Ho già osservato alla nota XXI che questo postulato ammette che dato un punto A sulla retta non esista in un verso dato alcun segmento minimo AB, vale a dire che sia minore di tutti gli altri aventi il primo estremo A nel verso dato. Tale proprietà si dimostra tosto anche pei segmenti con un estremo in A e di verso opposto, come pure per tutti gli altri punti della retta per mezzo del post. II.

Il post. XI si può separare in queste due parti:

In ogni segmento dato AB *esiste un punto* C *distinto dagli estremi.*

e nella prop. A della nota XXI.

Può essere che i g... credano che non vi sia che lo spazio della def. I, 38, perchè il testo deve occuparsi soltanto di tale spazio che corrisponde allo spazio fisico; ma l'aver dato il post. pr. I dimostra che io tengo distinta la classe dei punti data dai post. I e X dallo spazio a tre dimensioni, il che l'insegnante può far rilevare alla fine dell'insegnamento geometrico. Tanto ho detto in risposta ad un'osservazione cortese dell'egregio prof. Pieri (Periodico di Mat. vol. XII, fasc. sett.-ottobre 1897).

Errata-corrige

Da ultimo osservo che sono sfuggiti nel libro parecchi errori di stampa che saranno corretti in un'eventuale ristampa e che l'insegnante avrà cura di correggere nella scuola. Fra questi noto qui quelli che se sfuggono a prima vista possono rendere oscuro il ragionamento.

A pag. 26 linea 21 omettere « o solamente coppia »; a p. 99 linea 21 leggi « della metà di AB » invece « di AB »; a pag. 123 linea 2 « Y_1 » invece di « $Y,$ » e a linea 6

« $\widehat{X_1ZY_1} \equiv \widehat{X_1'Z'Y_1'}$ » in luogo di « $\widehat{X_1Z_1Y} \equiv \widehat{X_1'ZY_1'}$;

a pag. 143 linea 23 leggi « delle altre due faccie » invece « degli altri due »; a pag. 158 linea 2 « del poliedro » invece « di esso »; a pag. 295 linea 10 si ommetta « dapprima »; a pag. 309 lin. 11 e a pag. 310 linea 17 « sei » invece di « quattro »; a pag. 347 linea 4 « all'unità e di base h' » invece che « all'unità »; a p. 360 linea 13 « sono eguali, e chiamando con y l'ipotenusa » invece di « sono eguali ».

INDICE